TD 3 - réduction des endomorphismes

Exercice 3 – Sur l'espace des polynômes

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\quad f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$$

1. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un vecteur propre de f. Montrer que, nécessairement, $n = 1$.
2. Montrer que f a deux valeurs propres et déterminer les espaces propres correspondants.

Solution :

1. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $a_n \neq 0$) un vecteur propre de f. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$.
   On a donc :
   $$(X+1)(X-3)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\right) - X\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad (\star)$$
   Le polynôme $(X+1)(X-3)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\right)$ est de degré $n+1$ et son terme de plus haut degré est $n a_n X^{n+1}$.
   De plus, le polynôme $X\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$ est également de degré $n+1$ et son terme de plus haut degré est $a_n X^{n+1}$.
   On en déduit que le coefficient devant X^{n+1} du polynôme $(X+1)(X-3)\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}\right) - X\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$ est $(n-1)a_n$.
   Or le polynôme $\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré au plus n et n'a donc pas de terme de degré $n+1$.
   En identifiant les termes de degré $n+1$ dans l'égalité $(\star)$, cela signifie donc que $(n-1)a_n = 0$ et donc que $n = 1$ (car $a_n \neq 0$).
2. Soit $\lambda \in Sp(f)$ et soit P un vecteur propre associé à λ. On peut supposer sans perte de généralité que P est un polynôme unitaire.
   D'après la question 1, P est de degré 1 donc de la forme $P(X) = X + b$.
   On a $f(P) = \lambda P$ donc :
   $$(X+1)(X-3) \times 1 - X(X+b) = \lambda(X+b)$$
   En développant, on obtient $(-2-b)X - 3 = \lambda X + \lambda b$. En identifiant les coefficients, on obtient le système suivant :
   $$\begin{cases} -2-b = \lambda \\ 3 = \lambda b \end{cases}$$
   Ainsi, b est solution de l'équation $3 = (-2-b)b$ et on a donc $b = 1$ ou $b = -3$.
   Par suite, on obtient $\lambda = -3$ ou $\lambda = 1$. Ainsi, on a montré que $Sp(f) \subset \{-3; 1\}$.
   Réciproquement, si $\lambda = -3$ ou $\lambda = 1$, il est clair que λ est une valeur propre de f. Il suffit en effet de vérifier que le polynôme $P_1 = X+1$ est un vecteur propre pour $\lambda = -3$ et que $P_2 = X - 3$ est un vecteur propre pour $\lambda = 1$.
   De plus, la preuve ci-dessus montre que les sous-espaces propres asssociés sont :
   $$E_1 = Vect(X-3)$$
   $$E_{-3} = Vect(X+1)$$