Correction TD 3 - Exercices 5 - 10 - 11

Excercice 11

1. Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme sur $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. Ainsi, χ_f admet une racine, ce qui signifie que f admet une valeur propre λ.
2. Soit $x \in E_\lambda(f)$. Montrons que $g(x) \in E_\lambda(f)$.
$$f(x) = \lambda x$$
Donc
$$g(f(x)) = \lambda g(x)$$
Or, comme g et f commutent, on a :
$$f(g(x) = \lambda g(x)$$
ce qui signifie que $g(x) \in E_\lambda(f)$.
Ainsi, $E_\lambda(f)$ étant stable par g, la restriction de g à $E_\lambda(f)$ (qui est linéaire) est bien un endomorphisme de $E_\lambda(f)$.
3. La restriction de g à $E_\lambda(f)$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Elle admet donc une valeur propre x d'après la question 1. Alors x est un vecteur propre commun à g et à f (car $x \in E_\lambda(f)$).
4. On démontre un résultat préliminaire :

Lemme 1

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si g est diagonalisable sur E et si F est un sous-espace de E stable par F alors la restriction de g est diagonalisable sur F.

Démonstration. On note $\tilde{g}$ la restriction de g à F.
Comme g est diagonalisable sur E,
$$E = \oplus_{\lambda \in Sp(g)} E_\lambda(g)$$
Donc
$$F = \oplus_{\lambda \in Sp(g)} E_\lambda(g) \cap F$$
$$F = \oplus_{\lambda \in Sp(\tilde{g})} E_\lambda(\tilde{g})$$
où l'on a enlevé les valeurs propres λ telles que $E_\lambda(g) \cap F = \{0\}$. Cela prouve bien que $\tilde{g}$ est diagonalisable sur F. □

Preuve de la question 4. Pour tout $\lambda_i \in Sp(f)$, $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g. Donc la restriction de g est diagonalisable sur $E_{\lambda_i}(f)$. Autrement dit, il existe une base $\mathscr{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(f)$ formée de vecteurs propres de g. Ainsi, $\mathscr{B} = \bigcup_i \mathscr{B}_\rangle$ est une base de E formée de vecteurs propres de g et de f.

Autre résultat à connaître :

Proposition 2

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Si g est diagonalisable sur E, alors tout sous-espace $F \subset E$ admet un supplémentaire stable par g.

Démonstration. g est diagonalisable sur E donc il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de g. On considère par ailleurs une base de F $(f_1, \dots, f_k)$. Alors, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \dots, f_k)$ en une base de E à l'aide des vecteurs (e_i). On a donc une base de E de la forme $(f_1, \dots, f_k, e_{i_1}, \dots e_{i_{n-k}})$.
On pose $G = Vect(e_{i_1}, \dots e_{i_{n-k}})$. Alors, G est stable par G et G est un supplémentaire de f. □

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On va montrer que $\chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$.
$$\chi_{{}^tA}(X) = \det({}^tA - XId) = \det({}^tA - X^tId) = \det({}^t(A - XId)) = \det(A - \lambda Id) = \chi_A(X)$$

2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $Sp(AB) = Sp(BA)$.
   Soit $\lambda \in Sp(AB)$ avec $\lambda \neq 0$.
   Alors il existe $X \neq 0$ tel que $ABX = \lambda X$
   Donc $BABX = BX$
   Or, $BX \neq 0$, sinon on aurait $ABX = 0$ et donc $\lambda = 0$.
   Par conséquent, BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.
   Ainsi, $\lambda \in Sp(BA)$. Supposons maintenant que $\lambda \in Sp(AB)$ avec $\lambda = 0$.
   Alors AB n'est pas inversible. Donc BA n'est pas inversible (cela se voit facilement en prenant par exemplme le déterminant). Donc 0 est bien valeur propre de BA.
   Finalement, on a bien montré que $Sp(AB) = Sp(BA)$.

Exercice 10
Soit $\Phi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^t A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
(Une preuve de la diagonalisabilité de Φ est donnée dans l'exercice à l'aide de polynômes annulateurs. On propose ici une démonstration à partir des sous-espaces propres).
En considérant les matrices symétriques et les matrices antisymétriques, il est clair que -1 et 1 sont des vecteurs propres.
$E_1 = \{A \mid {}^tA = A\} = S_n(\mathbb{R})$ $E_{-1} = \{A \mid {}^tA = -A\} = A_n(\mathbb{R})$ On a $\dim(E_1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(E_{-1}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Comme $\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} = n = \dim(E)$, on en déduit qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres et que Φ est diagonalisable.
Enfin, il est possible d'exhiber une base dans laquelle $\mathrm{mat}(\Phi)$ est une symétrie. On considère pour cela une base de $S_n(\mathbb{R})$ $(E_{i,j} + E_{j,i},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant\leqslant n)$ et une base de $A_n(\mathbb{R})$ $(E_{i,j} - E_{j,i},\ 1 \leqslant i < j \leqslant\leqslant n)$