L2
Algèbre linéaire 2
L Deléaval, P.-A. Zitt

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

TD 3 — Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Éléments propres

Exercice 1 — Exemples élémentaires.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que 2 et -1 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que, si $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ est un couple propre, alors $\lambda^2 = -1$; en déduire le spectre de B sur $\mathbb{R}$.
3. On voit maintenant B comme matrice à coefficients complexes. Montrer que le nombre imaginaire i est valeur propre, et trouver l'espace propre associé dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 2 — Un endomorphisme de l'espace des matrices. Soit a, b, c et d 4 nombres réels. On considère les matrices réelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Calculer $AM - MA$.
2. Vérifier que l'application Φ définie par
$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM - MA \end{aligned}$$
est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 3 — Sur l'espace des polynômes. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP.$$

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un vecteur propre de f. Montrer que, nécessairement, $n = 1$ (on pourra considérer les termes de plus haut degré dans l'équation $f(P) = \lambda P$).
2. Montrer que f a deux valeurs propres, et déterminer les espaces propres correspondants.

Exercice 4 — En dimension infinie. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f'.

Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

Polynôme caractéristique

Exercice 5 — Préservation spectrale. Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer l'égalité des polynômes caractéristiques $\chi_{A^\top} = \chi_A$, et en déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A^\top) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
2. Montrer de même que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(AB) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(BA)$.

Exercice 6 — Matrice compagne.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$. On dit que A est la *matrice compagne* (ou “compagnon”) du polynôme unitaire $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = P$.

Diagonalisation

Exercice 7 — Trois exemples.

1. Montrer que la matrice A définie par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et la diagonaliser.
2. Qu'en est-il des matrices suivantes ?
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. La matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante est-elle diagonalisable ?
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 — Diagonalisabilité des endomorphismes de rang 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. En écrivant la matrice de u dans une base bien choisie, montrez que le polynôme caractéristique de u est de la forme $\chi_u = (-1)^n X^{n-1}(X - a)$, où $a = \mathrm{Tr}(u)$ est la trace de u. Quelles sont les valeurs propres de u ?

2. Montrez que, si $\mathrm{Tr}(u) = 0$, u n'est pas pas diagonalisable.
3. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$. Montrez que u est diagonalisable.

Exercice 10 — Diagonalisabilité de la transposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^\top$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 11 — Co-diagonalisabilité d'endomorphismes qui commutent. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit f, g deux endomorphismes de E qui commutent.

1. Montrer que f admet au moins une valeur propre qu'on notera λ.
2. Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g, et que la restriction de g à $E_\lambda(f)$ est un endomorphisme sur $E_\lambda(f)$.
3. En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre commun à f et g.
4. On suppose que f et g sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g.

Applications de la diagonalisation

Exercice 12 — Puissance de matrice. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 — Racine carrée de matrice. Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 — Suites récurrentes linéaires. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), ces trois suites sont-elles convergentes ?

Applications de la trigonalisation

Exercice 15. Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$.

Exercice 16 — Matrices nilpotentes. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier k tel que $A^k = 0$. Montrer les équivalences

$$A \text{ nilpotente} \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\} \iff \chi_A = (-1)^n X^n \iff A^n = 0.$$

Polynômes annulateurs

Exercice 17 — Polynômes annulateurs et éléments propres. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$ avec $u \neq 0$ et $u \neq \mathrm{Id}$.
   (a) Déterminer les éléments propres de u.
   (b) Montrer que u est la projection sur Im(u) parallèlement à Ker(u).
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \mathrm{Id}$. Montrer que u est diagonalisable. En déduire que sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\Phi : A \mapsto A^\top$ est diagonalisable.
3. Etant donnée F et G deux supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G, et $s = 2p - \mathrm{Id}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Montrer que $s^2 = \mathrm{Id}$ et en déduire les éléments propres de s.
   (c) Montrer si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u^2 = \mathrm{Id}$ avec $u \neq \mathrm{Id}$ et $u \neq -\mathrm{Id}$ alors u est une symétrie. Qu'en déduit-on sur l'application Φ de la question 2 ?

Exercice 18 — Diagonalisabilité à paramètres. Soit a, b, c trois réels et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
3. Soit λ un réel non nul ; la matrice $B = A + \lambda I_3$ est-elle inversible ?
4. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$.

Exercice 19. Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$A + \mathrm{Com}(A)^\top = zI_n.$$

Montrer que le cardinal du spectre de A est inférieur ou égal à 2.

Exercice 20 — Un peu de trace.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{N}$ et que $\mathrm{Tr}(A) \leqslant 4n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 21. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et α, β deux scalaires. Soit u, v, f trois endomorphismes tels que

$$\begin{cases} f & = \alpha u + \beta v \\ f^2 & = \alpha^2 u + \beta^2 v \\ f^3 & = \alpha^3 u + \beta^3 v \end{cases}.$$

Montrer que f est diagonalisable. Indice : déterminer un polynôme annulateur de f.