Exo 9 : Soit $n \geq 1$

* Montrons que $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à C_1 :

$$= 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{= \text{notation } B}$$

On développe B par rapport à C_1 :

$$= 2\Delta_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}}$$

$$\boxed{= 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}}$$

* Montrons par récurrence que $\Delta_n = n+1$ pour tout $n \geqslant 1$:
Soit $n \geqslant 1$,
posons HR_n: " $\Delta_n = n+1$ "

+ Pour $n = 1$ et $n = 2$ le résultat est évident

$\Delta_1 = |2| = 2$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$.

+ Soit $n \geqslant 1$, on suppose HR_{n-1}, HR_{n-2}:
Montrons le résultat pour HR_n.

on sait que : $\Delta_n = 2\,\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

Par HR_{n-1} : $\Delta_{n-1} = n$ $= 2 \times n - (n-1)$
par HR_{n-2} : $\Delta_{n-2} = n-1$ $= 2n - n + 1$
$= n + 1$

Ce résultat conclut la récurrence car HR_n est vérifié