ex 7

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_n$
$C_2 \to C_2 - C_n$
$\vdots$
$C_{n-1} \to C_{n-1} - C_n$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 - a & 0 & \cdots & a+x \\ b-a & \lambda_2 - a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+x \\ b-a & \cdots & b-a & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

Seuls les termes de la n-ième colonne comporte sont de dégré 1 (pour les autres le degré est nul).
On a donc $P(x)$ sous la forme $\alpha x + \beta$ puisque $P(x)$ est la somme de polynôme d'ordre 1.

2) $$P(-a) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & \lambda_2 - a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ b-a & \cdots & b-a & \lambda_n - a \end{vmatrix}$$

$$P(-b) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - b & a-b & \cdots & a-b \\ 0 & \lambda_2 - b & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a-b \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes de sa diagonale : $\prod_{i=1}^{n} c_{i,i}$

(avec $c_{i,j}$ terme de i^e ligne et j^e colonne)

Or $P(x)$ est une fonction affine de la forme $\alpha x + \beta$.

Puisque $P(-a) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i - a$ et $P(-b) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i - b$

On en déduit que pour tout x : $P(x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i - x$, puisqu'il existe une unique fonction affine passant par deux points et cette dernière le fait.

Pour conclure, puisque $D_n = P(0)$, $D_n =$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Scanné avec CamScanner