

Soit  $n \geq 1$ :

Exo 6

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & & \\ \vdots & & & \\ m & \dots & \dots & n \end{vmatrix}$$

Pour  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$   $C_j \leftarrow C_j - C_n$

On a alors:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & \dots & \dots & n-1-n & n \end{vmatrix}$$

La matrice est donc triangulaire supérieure

$$\begin{aligned} \det(\Delta_n) &= \prod_{i=1}^n a_{ii} = (1-n)(2-n) \dots (n-1-n) \times n \\ &= (-1)^{n-1} \underbrace{x(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \times n}_{m!} \\ &= (-1)^{n-1} \times m! \end{aligned}$$

□