L2
Algèbre linéaire 2
L Deléaval, P.-A. Zitt

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

TD 2 — Déterminons des déterminants

☙ Calculs élémentaires de déterminants ❧

Exercice 1 — En utilisant la définition.

1. Rappelez quels sont les éléments du groupe symétrique S_3.
2. En s'appuyant sur l'expression du déterminant d'une matrice sous forme d'une somme indexée par les éléments de S_3, montrez que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Exercice 2 — Deux méthodes pour un résultat.

1. En utilisant l'expression du déterminant d'une matrice sous forme d'une somme, montrer que

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}...a_{n,n}.$$

2. Donner une autre preuve en utilisant les opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 3 — Quelques déterminants explicites. Calculer les déterminants suivants en utilisant des opérations sur les lignes et les colonnes et/ou des développements suivant les lignes ou les colonnes.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. Soit a, b, c trois réels. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a), \qquad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Exercice 5 — Un peu de trigonométrie. Soit x, y, z trois réels.

1. Calculer le déterminant suivant
$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 y & \cos^2 y \\ 1 & \sin^2 z & \cos^2 z \end{vmatrix}.$$
2. Rappeler les formules qui donnent $\sin a - \sin b$ et $\cos a - \cos b$ en fonction de
$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right), \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), \cos\left(\frac{a+b}{2}\right), \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$
En déduire l'expression du déterminant suivant comme produit de trois sinus :
$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}.$$

Des déterminants de taille quelconque

Exercice 6. Soit $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

Exercice 7 — Faire compliqué pour faire simple. Soit $n \geqslant 1$. Soit a, b deux réels distincts, et soit $\lambda_1, \dots \lambda_n$ n nombres réels. On cherche à calculer
$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$$

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$P(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$
Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2. Évaluer $P(-a)$ et $P(-b)$ et en déduire D_n.

Exercice 8 — Un déterminant de binomiaux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$,
$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

Trouver une relation liant $\Delta_{n,p}$ et $\Delta_{n,p-1}$. En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 1$. Soit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Établir une relation de récurrence liant Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}, et en déduire Δ_n.

Quelques déterminants classiques

Exercice 10 — Déterminant de Vandermonde. On se donne une famille de n nombres $x_0, \dots, x_{n-1}$, réels ou complexes.

1. Calculer le déterminant

$$V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2. On suppose $x_0, \dots, x_{n-1}$ distincts deux à deux. On se donne n scalaires quelconques $f_0, \dots, f_{n-1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ tel que

$$\forall 0 \leq i \leq n-1, \quad P(x_i) = f_i.$$

Exercice 11 — Déterminant circulant. On cherche à calculer le déterminant de la matrice dite *circulante* suivante

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{pmatrix}.$$

1. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ (racine 3^{e} de l'unité dans $\mathbb{C}$) et on considère la matrice B donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

   Calculer $\det(B)$ en remarquant que $j = (j^2)^2$.

2. Calculer le produit AB puis, en remarquant que $j^3 = 1$, en déduire que

$$\det(AB) = \left(\sum_{k=0}^{2} x_k\right)\left(\sum_{l=0}^{2} x_l\, j^l\right)\left(\sum_{m=0}^{2} x_m\, (j^2)^m\right) V_3(1, j, j^2),$$

   où $V_3(1, j, j^2)$ est le déterminant de Vandermonde.

3. En déduire l'expression de $\det(A)$.

4. Soit $x_0, \dots, x_{n-1}$ des nombres complexes. En généralisant l'approche précédente, calculer le déterminant de la matrice circulante

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix}.$$

Autour du déterminant

Exercice 12 — Symétrie. Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille $2n+1$. Montrer que $\det A = 0$. Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est de taille paire ?

Exercice 13 — Équation de plan *via* les déterminants. Soit $u_1 = (-2, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 0, 3)$.

1. Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel F engendré par u_1 et u_2.

Exercice 14 — Un exercice complexe.

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice *conjuguée* donnée par $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})$. Quelle relation lie $\det(A)$ et $\det(\overline{A})$?
2. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $A^\top = \bar{A}$, alors $\det A \in \mathbb{R}$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Exercice 15.

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.
   (a) Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si et seulement si
   $$\det A = \pm 1.$$
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
   $$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, \quad A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}).$$
   (a) Montrer que le polynôme $P(x) = \det(A + xB)$ est constant égal à 1 ou à -1.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$
   $$\det{}^2\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{1}{x^{2n}}.$$
   (c) Déterminer les valeurs possibles de $\det A$ et $\det B$ grace aux résultats des questions précédentes.

Exercice 16 — Comatrice. Soit n un entier, $n \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det(\mathrm{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

Exercice 17 — Formules de Cramer. Soit a, b, c, d quatre réels deux à deux distincts. Résoudre le système suivant

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}.$$