L2
Algèbre linéaire 2
L Deléaval, P.-A. Zitt

Université Gustave Eiffel
Année 2023–2024

TD 1 — Groupe symétrique, définition du déterminant

Groupe symétrique

Exercice 1 — Calculs élémentaires.

1. Dans le groupe $\mathcal{S}_4$, vérifier que $(1,4)(4,3)$ est un 3-cycle.
2. Determiner dans le groupe $\mathcal{S}_5$ l'inverse du cycle $(1,3,5,4)$.
3. Dans le groupe $\mathcal{S}_7$, calculer le produit $(3,5,6)(5,6,7)(6,2,1)(1,2)$. Décomposer cette permutation en produits de cycles à supports disjoints.
4. Dans le groupe $\mathcal{S}_9$, calculer le produit aba^{-1} pour $a = (1,2,6)(1,3)$ et $b = (1,5,7,9)$, puis pour $a = (1,2,9,7,5,3)$ et $b = (1,7,3)$. Dans ce dernier cas, comparer le résultat avec le cycle $(a(1), a(7), a(3))$.

Exercice 2 — Définition de la signature.

1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 8 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Même question avec, pour $n \geqslant 2$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 — Décomposition en produits. Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 — Décomposition en produits II.

1. Dans $\mathcal{S}_n$, avec $n \geqslant 2$, on considère une permutation σ et un p-cycle $c = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $2 \leq p \leq n$. Montrer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p-cycle, que l'on précisera.
2. Montrer que toute transposition de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$.
3. En déduire que toute permutation de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$.
4. En s'inspirant de la première question, montrer que toute transposition $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$, s'écrit comme produit composé uniquement des cycles

$$(1,2), (2,3,\dots,n-1,n), (n,n-1,n-2,\dots,3,2).$$

5. Déduire des questions précédentes que le groupe S_n est engendré par les cycles $(1,2)$ et $(2,3,\dots,n-1,n)$.

Exercice 5 — Permutations paires et impaires.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des permutations paires de S_n est un sous-groupe de $(S_n,\circ)$. Qu'en est-il de l'ensemble des permutations impaires $\mathcal{I}_n$?
2. Rappeler quel est le cardinal de $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$. Comment obtient-on ce résultat ?
3. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$ puis $\mathcal{A}_4$.

Exercice 6 — Oh ! combien de transpositions... . Pour tout $2 \leq j \leq n$, on note $I_j := \{1,2,\dots,j\}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} F : I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_n &\to \mathcal{S}_n \\ (i_2, i_3, \dots, i_n) &\mapsto (i_2,2)(i_3,3)\cdots(i_n,n) \end{aligned}$$

est injective, puis qu'elle est bijective.

2. En déduire que toute permutation s'écrit comme un produit d'au plus $n-1$ transpositions.

Exercice 7 — Un groupe vraiment pas commutatif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{Z}_n$ l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres :

$$\mathcal{Z}_n = \{s \in \mathcal{S}_n : \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ s\circ\sigma = \sigma\circ s\}.$$

1. Déterminer $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$.
2. On suppose à partir de maintenant que $n \geqslant 3$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, montrer qu'il existe une permutation $\sigma_i \in \mathcal{S}_n$ dont le seul point fixe est i.
3. En déduire que $\mathcal{Z}_n = \{\mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}\}$.

Rappels sur les applications linéaires.

Exercice 8 — Trace d'une matrice et d'un endomorphisme. On rappelle que la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Montrer que l'application $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire.
2. Montrer que pour toute matrice carrée A et B, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que pour toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Soit f un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et $\mathcal{E}$ une base de E. Montrer que le réel $\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f))$ est indépendant de la base choisie $\mathcal{E}$. On définit alors la trace de l'endomorphisme f par
$$\mathrm{Tr}(f) := \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f)).$$
4. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'endomorphisme f défini par : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$$f(P) = P' - X^2P(0).$$

   Après avoir vérifié que f était bien un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer $\mathrm{Tr}(f)$.

☙ Applications multilinéaires et déterminant d'un endomorphisme ❧

Exercice 9 — Multilinéarité — exemples.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Soit f une application 3-linéaire (ou trilinéaire) de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. On considère trois vecteurs de E, u_1, u_2, u_3, tels que

$$\forall j \in \{1,2,3\},\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i,$$

où les a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$). Montrer que

$$f(u_1,u_2,u_3) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3} f(e_k,e_l,e_m).$$

2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les applications définies par

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\big) := (x_1y_1z_1 + 2x_2y_2z_2, 3x_2y_1z_2, 0),$$

et

$$g\big((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\big) := (x_1y_1z_1 + 2x_2y_2z_2, x_1x_2).$$

   (a) Ces applications sont-elles 3-linéaires ?

   (b) Si tel est le cas, vérifiez la formule précédente en choisissant pour base (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 — Trace et déterminants. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base de E.

1. Montrer que l'application $\psi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\psi(x_1,...,x_n) := \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_{j-1},f(x_j),x_{j+1},...,x_n),$$

est une forme n-linéaire alternée.

2. En déduire que pour tout $(x_1,...,x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_{j-1},f(x_j),x_{j+1},...,x_n) = \operatorname{Tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n).$$

Exercice 11 — Sur un espace de fonctions. Soit $n \geqslant 1$. Soit $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Pour $0 \leq j \leq n$, on note e_j l'élément de V défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_j(x) = x^j e^x.$$

Montrer que $(e_0,\dots,e_n)$ est une base de V.

3. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V. Donner sa matrice dans la base $(e_0,\dots,e_n)$, et en déduire son déterminant.