
TD 1 — Groupe symétrique, définition du déterminant

↪ Groupe symétrique ↪

Exercice 1 — Calculs élémentaires.

1. Dans le groupe \mathcal{S}_4 , vérifier que $(1, 4)(4, 3)$ est un 3-cycle.
2. Déterminer dans le groupe \mathcal{S}_5 l'inverse du cycle $(1, 3, 5, 4)$.
3. Dans le groupe \mathcal{S}_7 , calculer le produit $(3, 5, 6)(5, 6, 7)(6, 2, 1)(1, 2)$. Décomposer cette permutation en produits de cycles à supports disjoints.
4. Dans le groupe \mathcal{S}_9 , calculer le produit aba^{-1} pour $a = (1, 2, 6)(1, 3)$ et $b = (1, 5, 7, 9)$, puis pour $a = (1, 2, 9, 7, 5, 3)$ et $b = (1, 7, 3)$. Dans ce dernier cas, comparer le résultat avec le cycle $(a(1), a(7), a(3))$.

Exercice 2 — Définition de la signature.

1. Déterminer la signature des permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 8 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Même question avec, pour $n \geq 2$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 — Décomposition en produits. Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 — Décomposition en produits II.

1. Dans \mathcal{S}_n , avec $n \geq 2$, on considère une permutation σ et un p -cycle $c = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $2 \leq p \leq n$. Montrer que la permutation $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un p -cycle, que l'on précisera.
2. Montrer que toute transposition de \mathcal{S}_n peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$.
3. En déduire que toute permutation de \mathcal{S}_n peut s'écrire comme le produit de transpositions de la forme $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$.
4. En s'inspirant de la première question, montrer que toute transposition $(1, i)$, $i \in \{2, \dots, n\}$, s'écrit comme produit composé uniquement des cycles

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, n-1, n-2, \dots, 3, 2).$$

5. Dédurre des questions précédentes que le groupe S_n est engendré par les cycles $(1, 2)$ et $(2, 3, \dots, n-1, n)$.

Exercice 5 — Permutations paires et impaires.

1. Montrer que l'ensemble \mathcal{A}_n des permutations paires de S_n est un sous-groupe de (S_n, \circ) . Qu'en est-il de l'ensemble des permutations impaires \mathcal{I}_n ?
2. Rappeler quel est le cardinal de \mathcal{A}_n et \mathcal{I}_n . Comment obtient-on ce résultat ?
3. Déterminer tous les éléments de \mathcal{A}_3 puis \mathcal{A}_4 .

Exercice 6 — Un groupe vraiment pas commutatif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{Z}_n l'ensemble des permutations qui commutent avec toutes les autres :

$$\mathcal{Z}_n = \{s \in S_n : \forall \sigma \in S_n, s \circ \sigma = \sigma \circ s\}.$$

1. Déterminer \mathcal{Z}_1 et \mathcal{Z}_2 .
2. On suppose à partir de maintenant que $n \geq 3$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer qu'il existe une permutation $\sigma_i \in S_n$ dont le seul point fixe est i .
3. En déduire que $\mathcal{Z}_n = \{\text{Id}_{\{1, \dots, n\}}\}$.

🐾 **Rappels sur les applications linéaires.** 🐾

Exercice 7 — Trace d'une matrice et d'un endomorphisme. On rappelle que la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Montrer que l'application $A \mapsto \text{Tr}(A)$ est une forme linéaire.
2. Montrer que pour toute matrice carrée A et B , $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. En déduire que pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A)$.
3. Soit f un endomorphisme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , et \mathcal{E} une base de E . Montrer que le réel $\text{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f))$ est indépendant de la base choisie \mathcal{E} . On définit alors la trace de l'endomorphisme f par

$$\text{Tr}(f) := \text{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f)).$$

4. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'endomorphisme f défini par : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P) = P' - X^2P(0).$$

Après avoir vérifié que f était bien un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer $\text{Tr}(f)$.

🐾 **Applications multilinéaires et déterminant d'un endomorphisme** 🐾

Exercice 8 — To be or not to be multilinéaire. Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan. On note $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$, $u_3 = (x_3, y_3)$ et on considère les applications de $E \times E \times E$ dans \mathbb{R} définies par :

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, u_3) &= x_1x_2x_3 \\ g(u_1, u_2, u_3) &= 3x_1y_2x_3 \\ h(u_1, u_2, u_3) &= x_1y_1x_2y_3 \\ k(u_1, u_2, u_3) &= x_1x_2 \\ \ell(u_1, u_2, u_3) &= y_3 \end{aligned}$$

Parmi ces cinq applications, lesquelles sont tri-linéaires ?

Exercice 9 — Trace et déterminants. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Montrer que l'application $\psi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n),$$

est une forme n -linéaire alternée.

2. En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = \text{Tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Exercice 10 — Sur un espace de fonctions. Soit $n \geq 1$. Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Pour $0 \leq j \leq n$, on note e_j l'élément de V défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_j(x) = x^j e^x.$$

Montrer que (e_0, \dots, e_n) est une base de V .

3. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V . Donner sa matrice dans la base (e_0, \dots, e_n) , et en déduire son déterminant.