Nombres complexes – exercices

4-5 septembre 2023

I. Définition et propriétés des nombres complexes

Exercice 1
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z = 3 + 2i$
2. $z = 1 - i$
3. $z = 5$
4. $z = i$

Exercice 2
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (1 + i) + (2 + i)$
2. $z = 3 + 2i - i - 1$
3. $z = (4 + 5i) - (1 - i)$
4. $z = 2i - \left(-\frac{1}{2}i - 1\right) + 2 + i$

Exercice 3
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = i(1 - 2i)$
2. $z = (1 + i)(2 + i)$
3. $z = -(3 + i)(-1 - 2i)$
4. $z = 2\left(-\frac{1}{2}i - 1\right)\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)$

Exercice 4
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (2 + 2i)^2$
2. $z = i(1 - i)^2$
3. $z = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$
4. $z = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)^3$

Exercice 5
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :

$$z = i^{2023} + i^{2024} + i^{2025} + i^{2026}.$$

Exercice 6
On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que j est solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

2. Montrer que j est solution de l'équation $x^3 = 1$.
3. En déduire la forme algébrique de j^{2023}.

Exercice 7
Pour chaque question, déterminer les couples de nombres réels $(a\,;b)$ vérifiant l'égalité.

1. $1 + a + i = 2 + (3b + 1)i$
2. $2 + 3a + i(5b + 1 + b^2) = 1 + ia$
3. $ab + 1 + i = i(a + b)$
4. $ab - 2 + i = 1 + i(a + b)$

Exercice 8
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $z = 3a^2 - 1 - i(a + 5)$

1. Quelles sont les valeurs de a telles que $z \in \mathbb{R}$?
2. Quelles sont les valeurs de a telles que $z \in i\mathbb{R}$?

II. Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 9
Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = -3 - 2i$
3. $z = 2i$
4. $z = i - 1$

Exercice 10
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1 + i}$
2. $z = \dfrac{3 + i}{5 + 2i}$
3. $z = -\dfrac{5i}{7 - 2i}$
4. $z = \dfrac{5 + 4i}{3 - 2i}$
5. $z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$
6. $z = \left(\dfrac{1 + i}{2 - i}\right)^2 - \dfrac{3 + 6i}{3 + 4i}$

Exercice 11
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \overline{\overline{1 - 3i}}$
2. $z = \overline{(1 + i)^2}$
3. $z = \overline{(1 + i)\overline{(5 + 7i)}}$
4. $z = \overline{\left(\dfrac{2 - i}{1 + 2i}\right)}$
5. $z = \dfrac{\overline{5 + 4i}}{\overline{3 - 2i}}$

   Indication pour la question 5 :
   la forme algébrique de $\dfrac{5 + 4i}{3 - 2i}$ a déjà été calculée dans l'exercice précédent.

Exercice 12
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

Exercice 13
La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{3 + iz} = 3 - iz$.

Exercice 14
Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
2. Il existe $z \in \mathbb{C}^*$, tel que pour tout $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 15
Soit $n \geqslant 2$ et soient $a_0, a_1, \dots a_n$ des nombres réels (avec $a_n \neq 0$).
Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$
   Montrer que si $f(z) = 0$, alors $f(\overline{z}) = 0$.
2. En voyant ce résultat, une personne tient le raisonnement suivant : « Autrement dit, à chaque fois que z est une racine de f, $\overline{z}$ est également une racine de f. Cela signifie que toute fonction polynôme à coefficients réels de degré supérieur à deux admet un nombre pair de racines. »
   Qu'en pensez-vous ?

Exercice 16
On représente parfois les résistances dans les circuits électroniques par des nombres complexes.

- L'impédance d'une résistance pure est par exemple représentée par le nombre réel $Z_R = R$. C'est le seul composant à avoir une impédance réelle.
- L'impédance d'une bobine d'inductance L et représenté par le nombre complexe $Z_L = iL\omega$ où ω désigne la pulsation du signal dépend de l'intensité du courant présent dans le circuit.

Dans un circuit, une résistance positionnée en parallèle avec une bobine peut être modélisée par un unique composant dont l'impédance Z vérifie :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}.$$

1. Montrer que $Z = \dfrac{iRL\omega}{R + iL\omega}$.
2. Donner la forme algébrique de Z en fonction de R, de L et de ω.

III. Représentation des nombres complexes dans le plan

Exercice 17

1. Dans un repère orthonormé, placer les points A, B, C, D et E dont les affixes sont données ci-dessous :
   $z_A = 3 + 2i$ $z_B = 1 + i$ $z_C = -4i$ $z_D = -3$ $z_E = -1 + 2i$
2. Déterminer les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$.
3. Déterminer les longueurs AB, AE, BD et CE.

Exercice 18
Dans un repère orthonormé :

1. Représenter l'ensemble des points M d'affixes z tels que $\text{Re}(z) = 4$.
2. Représenter l'ensemble des points N d'affixes z tels que $\text{Im}(z) \geqslant 0$.
3. Représenter l'ensemble des points L d'affixes z tels que $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$.

IV. Equations de degré un

Exercice 19
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z+5i+1=i-7z$
2. $3-2z=\dfrac{1}{3}-4iz$
3. $z-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5i}{7}+\dfrac{z}{9}$
4. $z+3i=z-3i$
5. $z^2(3+i)=z(1-2i)$
6. $\overline{z}=1-i-2\overline{z}$
7. $1-i\overline{z}=4+\overline{z}$
8. $2\overline{z}-z=3+iz$
9. $\overline{3z}+2i-1=i-2z$

Exercice 20
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les système suivants :

1. $\begin{cases} z_1+z_2 & = & 3i \\ 2z_1-3z_2 & = & 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1+5z_2 & = & i \\ 2\overline{z_1}-3\overline{z_2} & = & 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} iz_1+5z_2 & = & 2 \\ \overline{z_1}-3i\overline{z_2} & = & i \end{cases}$
4. $\begin{cases} z_1+z_2 & = & 1 \\ 4z_1-3i\overline{z_2} & = & 4 \end{cases}$

V. Module, argument et forme exponentielle

Exercice 21
Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z=1+i$
2. $z=2\pi i$
3. $z=2-2\sqrt{3}i$
4. $z=-5-5i$
5. $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

Exercice 22
Soit les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6},\ z_2=2+2i \text{ et } Z=\frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Construire à la règle (non graduée) et au compas les points A, B et C.
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2023}.

Exercice 23
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- $z^4=-1$
- $z^3=i$

Exercice 24
Soit $n \geqslant 2$. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$z^n = \bar{z}$$

Exercice 25
Déterminer tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.

VI. Exercices difficiles

Exercice 26
Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des points du plan. Peut-on trouver n points $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ tels que $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ soient les milieux respectifs des segments $\left[\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\right]$, $\left[\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\right]$, $\ldots$, $\left[\mathrm{B}_n\mathrm{B}_1\right]$?

Exercice 27
Dans un repère orthonormé, peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

Exercice 28
Soient A, B et C trois points non alignés d'affixe a, b et c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si,
$$a + bj + cj^2 = 0.$$
2. On ne suppose pas nécessairement que ABC est équilatéral. On construit à partir de ABC les trois triangles équilatéraux de base [AB], [AC] et [BC] construits à l'extérieur de ABC. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forme un triangle équilatéral.

Exercice 29
Déterminer toutes les fonctions
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } z \in \mathbb{R},\ f(z) = z \\ \text{Pour tous } z, z' \in \mathbb{C}, f(z + z') = f(z) + f(z') \\ \text{Pour tous } z, z' \in \mathbb{C}, f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Exercice 30
L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe des entiers x_n et y_n tels que $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
3. En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.
4. En déduire qu'il existe bien une infinité de couples d'entiers naturels $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.