Nombres complexes – cours

4-5 septembre 2023

I. Définition et propriétés des nombres complexes

1. Définition d'un nombre complexe

Définition 1

- Il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque

On ne note pas $\sqrt{-1}$ pour éviter les confusions. Sinon, on pourrait être tenté d'écrire par exemple :

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Définition 2

- L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z.
- Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque

- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
- Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$. En particulier, un nombre complexe n'est ni positif ni négatif et écrire $2i > 0$ n'a aucun sens.

Exemple

- $5 + i$ est un nombre complexe avec $a = 5$ et $b = 1$.
- Les nombres réels sont des cas particuliers de nombres complexes (avec $b = 0$).

Définition 3

- Si $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$, z est appelé un **imaginaire pur**
- L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Nombres complexes

La notation i n'a pas été utilisée dès le départ.
En 1777, **Leonhard Euler** décida de l'introduire (i comme imaginaire) et d'écrire $i \times i = -1$ afin d'éviter les ambiguités de la notation $\sqrt{-1}$.
À la fin du XVIII^e siècle, les quantités imaginaires n'étaient pourtant toujours pas réellement acceptées par la communauté mathématique mais seulement tolérées pour leur côté pratique. C'est au XIX^e siècle que des mathématiciens comme **Carl Friedrich Gauß** finissent par leur donner une véritable légitimité. Cela passera entre autres par le fait de représenter géométriquement les nombres complexes dans le plan (voir chapitres suivants). Aussi, Gauss adoptera le terme « nombres complexes » pour rompre avec l'idée qu'il s'agit de quantités qui n'existeraient pas comme le suggère le terme « imaginaire ».

2. Nombres complexes et opérations

Définition 4
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ (a, b, a', b' sont des réels).
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Exemple
Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$.
$z + z' = (1 + i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + i(1 + (-3)) = 3 - 2i$

Proposition 1
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$.
- $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Remarque
Le deuxième point de la Proposition 1 signifie que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

Démonstration.
- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $z = 0$.
  On veut montrer qu'alors $a = 0$ et $b = 0$. Supposons par l'absurde que $b \neq 0$.
  Comme $a + ib = 0$, alors $i = -\dfrac{a}{b}$ (car $b \neq 0$).
  Finalement, cela prouve que i est un nombre réel, ce qui est absurde.
  On a donc prouvé que $b = 0$. Par ailleurs, $z = a + ib = a + i \times 0 = a$ donc $a = 0$.
  Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 0$, il est immédiat de voir que $z = a + ib = 0$.
- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $z' = a' + ib'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z = z' &\iff a + ib = a + ib' \\
&\iff (a - a') + i(b - b') = 0 \\
&\iff \begin{cases} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{cases} \text{d'après le point précédent} \\
&\iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Exemple
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $z = x^3 + 2 + i(x - 2)$.
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles z est un réel. Déterminer z le cas échéant.

Solution :
$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff a - 2 = 0 \iff x = 2$.
Dans ce cas, $z = 2^3 + 2 + i \times (2 - 2) = 10$.

Proposition 2
Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- $z + z' = z' + z$ **(commutativité de l'addition)**
- $zz' = z'z$ **(commutativité de la multiplication)**
- $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ **(associativité de l'addition)**
- $(zz')z'' = z(z'z'')$ **(associativité de la multiplication)**

- $z + 0 = z$ **(élément neutre de l'addition)**
- $z \times 1 = z$ **(élément neutre de la multiplication)**
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$ **(distributivité)**
- Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$ **(règle du produit nul)**

Démonstration. On écrit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ avec $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$. Les démonstrations découlent de la définition de l'addition et de la multiplication de nombres complexes. On détaille par exemple la démonstration de la règle du produit nul.
Il est clair que si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
Réciproquement, supposons que $zz' = 0$. Cela signifie que $(aa' - bb') + i(ab' + a'b) = 0$.
Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on en déduit le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} aa' - bb' = 0 \\ ab' + a'b = 0 \end{cases}$$

- Si $a' \neq 0$, on peut également en déduire :

$$\begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{bb'}{a'} \times b' + a'b = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ b \times \left(\frac{b'^2}{a'} + a'\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{b}{a'} \times \left(b'^2 + a'^2\right) = 0 \end{cases}$$

  D'après la seconde égalité, on en déduit que $\frac{b}{a'} = 0$ ou $b'^2 + a'^2 = 0$.
  La seconde égalité est impossible donc $\frac{b}{a'} = 0$ donc $b = 0$. En utilisant la première égalité, on voit alors que $a = \frac{bb'}{a'} = 0$. Finalement, on a montré que $a = b = 0$ et donc que $z = 0$.
- Si $a' = 0$. On obtient les équations $bb' = 0$ et $ab' = 0$.
  Ainsi, soit $b' = 0$ et donc $z' = 0$. Dans le cas où $b' = 0$, on aura $a = b = 0$ et donc $z = 0$.
  En conclusion, on a montré que, dans tous les cas, $z = 0$ ou $z' = 0$. $\square$

Exemple
Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$.
$z \times z' = (1 + i)(2 - 3i) = 1 \times 2 + 1 \times (-3i) + i \times 2 + i \times (-3i) = 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i$.

II. Conjugué d'un nombre complexe

1. Définition et propriétés algébriques

Définition 5
Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z).$$

Remarque
Les nombres complexes conjugués sont par exemple utilisés dans le cadre de la résolution des équations polynomiales ou pour calculer l'inverse d'un nombre complexe.

Exemple
Si $z = 3 + 5i$ alors $\overline{z} = 3 - 5i$.

Proposition 3
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a - ib} = \overline{a - (-ib)} = a + ib = z$. □

Proposition 4
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

Démonstration. Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.
2. $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = \mathrm{Im}(z)$. □

Proposition 5
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$
2. $z \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$

Démonstration. Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $\overline{z} = z \Longleftrightarrow \overline{z} - z = 0 \Longleftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{z} = -z \Longleftrightarrow \overline{z} + z = 0 \Longleftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$. □

Proposition 6
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ et :

$$z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$$

Démonstration. Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Alors $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))(\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)) = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$. En particulier, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$. □

2. Inverse et quotient de nombres complexes

Proposition 7
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Le nombre z' est appelé l'**inverse** de z et noté $\dfrac{1}{z}$.

Remarque
Pour démontrer la Proposition 7, la difficulté principale réside dans le fait que l'on ne voit pas trop comment définir z' par rapport à z. Pour cela, afin de démontrer que z' existe et est unique, on va procéder en deux étapes. La première étape (appelée analyse) consiste à supposer que z' existe. En écrivant sa forme algébrique $z' = c + id$, l'objectif sera alors de déterminer c et d. À la fin de l'analyse, on aura ainsi montré que si z' est unique, il ne peut prendre qu'une seule valeur possible. Autrement dit, si z' existe, il est nécessairement unique. La deuxième étape (appelée synthèse) consiste enfin à prouver l'existence. Pour cela, on définit z' par la formule trouvée précédemment et on vérifie que z' vérifie bien $zz' = 1$. L'analyse préalable aura donc non seulement permis de démontrer l'unicité de z' mais aussi d'indiquer la formule à poser dans la synthèse pour démontrer son existence.

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Dans le cas où $b = 0$, $z \in \mathbb{R}$ et la propriété est évidente. On peut donc supposer que $b \neq 0$.
Analyse : Supposons qu'il existe $z' = c + id \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Ainsi, $(a + ib)(c + id) = 1$
Donc $(ac - bd) + i(ad + bc) = 1$
Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$
Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \quad \text{(car } b \neq 0) \end{cases}$
Donc $\begin{cases} a \times (-\dfrac{ad}{b}) - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} -\frac{d}{b} \times (a^2 + b^2) = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{(car } a^2 + b^2 \neq 0) \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$
Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$
Ainsi, $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$.
Cela prouve donc que si z' existe, alors il est unique.

Synthèse : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $(a, b \in \mathbb{R})$.
On pose $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$ (ce qui est possible car $a^2 + b^2 \neq 0$).
On a alors $z \times z' = (a + ib)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}\right) = \ldots = 1$.
Cela prouve donc l'existence de z'. □

Définition 6
Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le **quotient** de z par z' est le nombre complexe $z \times \dfrac{1}{z'}$.
On le note $\dfrac{z}{z'}$.

Méthode (Calculer la forme algébrique d'un quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$)
Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Exemple
Calculer la forme algébrique de $z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i}$

Solution :
$z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i} = \dfrac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{3 - 4i - 3i - 4}{3^2 + 4^2} = \dfrac{-1 - 7i}{25} = -\dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i$

3. Conjugué et opérations

Proposition 8
Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. Si $z_1 \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$
4. Si $z_2 \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Démonstration. 1. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Il suffit alors d'écrire les deux termes de l'égalité en fonction de a_1, a_2, b_1 et b_2 afin de vérifier l'égalité annoncée.

2. idem
3. Soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$. Par définition de l'inverse de z_1, $z_1 \times \frac{1}{z_1} = 1$.
   Ainsi, $\overline{z_1 \times \frac{1}{z_1}} = \overline{1} = 1$.
   Or, $\overline{z_1 \times \frac{1}{z_1}} = \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}$ d'après le point 2.
   On en déduit que $\overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = 1$.
   Par définition de l'inverse de $\overline{z_1}$, on en déduit que $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$.
4. Cela résulte immédiatement des points 2 et 3, en écrivant que $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.
5. On montre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ » est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité est évidente : $\overline{z} = \overline{z}$.
   Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   $\overline{(z^{n+1})} = \overline{(z^n \times z)} = \overline{(z^n)} \times \overline{z}$ (d'après le point 2)
   $= (\overline{z})^n \times \overline{z}$ (d'après $\mathcal{P}(n)$)
   $= (\overline{z})^{n+1}$.
   Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. □

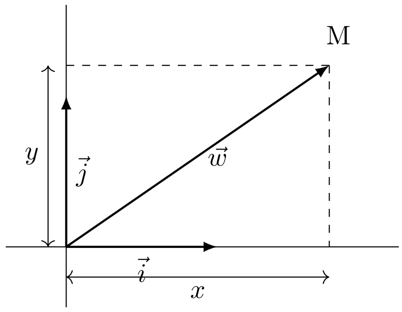
III. Représentation des nombres complexes dans le plan

Représentation des nombres complexes

Dès la fin du XVII^e siècle, il semble que **Carl Friedrich Gauß** fait eu l'idée de représenter les nombres complexes dans le plan. On trouve en tout cas cette idée dans des lettres datées de 1797. Gauss ne publiera cependant rien à ce sujet et c'est en 1806 que le mathématicien suisse et amateur **Jean Robert Argand** (1768-1822) publie un traité intitulé *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*. Cet essai tombe toputefois assez vite dans l'oubli et les noms de **Gauß** et de **Cauchy** seront par la suite bien plus souvent associés à la représentation géométrique des nombres complexes que ne l'est celui d'**Argand**.

Définition 7
On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soit M le point du plan de coordonnées $(x;y)$.

- On appelle **affixe du point M** le nombre complexe $x + iy$.
- On appelle **affixe du vecteur $\vec{w}$** l'affixe du point M tel que $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.



Proposition 9
Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$.
- Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2}$.

Exemple
Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 2 - 3i$ et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = -1 + 5i$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Solution :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} &= z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \\ &= (-1 + 5i) - (2 - 3i) \\ &= -1 + 5i - 2 + 3i \\ &= -3 + 8i \end{aligned}$$

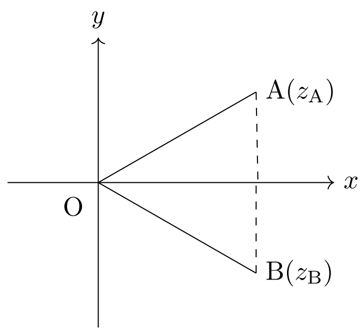
Proposition 10
Soient $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Le vecteur $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.
- Le vecteur $\lambda\vec{w_1}$ a pour affixe λz_1.

Exemple
Soient $\vec{w_1}$ d'affixe $z_1 = 3i + 5$ et $\vec{w_2}$ d'affixe $z_2 = 1 - i$. Calculer l'affixe du vecteur $3\vec{w_1} + \vec{w_2}$.

Solution :
L'affixe de $3\vec{w_1} + \vec{w_2}$ est :

$$\begin{aligned} 3z_1 + z_2 &= 3 \times (3i + 5) + (1 - i) \\ &= 9i + 15 + 1 - i \\ &= 16 + 8i \end{aligned}$$

Proposition 11
Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
B est le symétrique de A par rapport à l'axe (Ox) si, et seulement si, $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$



IV. Équations de degré un

Méthode (Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$)

- Si z ou $\overline{z}$ intervient seul, on résout de la même manière que dans $\mathbb{R}$.
- Si z et $\overline{z}$ interviennent simultanément, on pose $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et on utilise la propriété 1 d'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3\overline{z} + 2i = 5\overline{z}$
2. $4 + i + 2z = i\overline{z}$

Solution :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & 2i = 5\overline{z} - 3\overline{z} \\ \iff & 2i = 2\overline{z} \\ \iff & \overline{z} = i \\ \iff & z = -i \end{aligned}$$

2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} & 4 + i + 2z = i\overline{z} \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) = i(a - ib) \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) = ia + b \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) - ia - b = 0 \\ \iff & 4 + 2a - b + i(1 + 2b - a) = 0 \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} 4 + 2a - b = 0 \\ 1 + 2b - a = 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -2 \end{array} \right. \\ \iff & z = -3 - 2i \end{aligned}$$