Université Gustave Eiffel — **Licence L1**
1er semestre 2023/2024 — **Calcul différentiel et intégral**

Devoir de préparation pour le CC2

Exercice 1. Soit la fonction $f : x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Que vaut $f(0)$?
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f. Dériver la fonction f.
3. En déduire que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer f'
4. Déterminer la valeur de x telle que $\arctan(x) = \pi/4$.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) + \arctan(x)$ est constante sur chaque intervalle de son ensemble de définition (on pourra calculer sa dérivée). Déduire les constantes de la question 2.

Exercice 3. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x+1)}, \quad x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[.$$

1. On propose de chercher les constantes A, B, C telles que:

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

   a. Trouver la valeur de B (indication: en considérant $g(x) = (x-2)^2 f(x)$ pour une valeur judicieuse de x, trouver directement la valeur de B).
   b. Trouver la valeur de C (indication: en considérant $h(x) = (x+1)f(x)$ pour une valeur judicieuse de x, trouver directement la valeur de C).
   c. Déterminer la valeur de f en 0. En déduire la valeur de A

2. Calculer en intégrant par parties l'intégrale suivante pour $t > 3$:

$$F(t) = \int_3^t \frac{2\ln(x+1)}{(x-2)^3} dx.$$

Exercice 4. Trouver les constantes a, b, c et d tel que

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = ax + b + c\frac{2x}{x^2+1} + \frac{d}{x^2+1}$$

et en déduire $\displaystyle\int_0^t \frac{(x^3+1)}{(x^2+1)} dx$

Exercice 5. A l'aide d'une intégration par partie, calculer pour une valeur $a > 0$ fixée:

$$\int_0^a x^2 \ln(2+x) dx$$

Exercice 6. Après avoir linéarisé $\sin(2t)^5$, calculer la primitive $\int_0^x \sin(2t)^5 dt$

Exercice 7. En effectuant le changement de variable $u = \tan(x/2)$, calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$$

Exercice 8. On considère l'équation différentielle définie sur $I =]-\infty, \infty[$:

$$y'(x) + y(x) = (x^2+1)e^{-x}$$

1. Donner les solutions du problème homogène (ou sans second membre) sur I.
2. Trouver une solution particulière de cette équation différentielle.
3. En déduire la solution de

$$y'(x) + y(x) = (x^2+1)e^{-x} \text{ avec } y(0) = 4.$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^t xe^{x^2} dx$
2. $\int_0^t \cos(e^x)e^x dx$
3. $\int_1^t \frac{\ln(x)}{x} dx$