



Nom et prénom :

.....

**Numéro d'étudiant**

0 0 0 0 0 0  
1 1 1 1 1 1  
2 2 2 2 2 2  
3 3 3 3 3 3  
4 4 4 4 4 4  
5 5 5 5 5 5  
6 6 6 6 6 6  
7 7 7 7 7 7  
8 8 8 8 8 8  
9 9 9 9 9 9

**Question 1**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + x}{x^5 + x^3} =$

$-\infty$   0  
 1   $+\infty$

**Explication :**  $\frac{x^7 + x}{x^5 + x^3} = \frac{x(x^6 + 1)}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{x^6 + 1}{x^2(x^2 + 1)} \rightarrow +\infty.$

**Question 2**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

la limite n'existe pas  1  
 -1  0

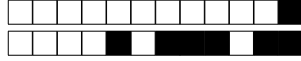
**Explication :**  $\forall x > 0, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  donc  $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ .  
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .

De même,  $\forall x < 0, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  donc  $xx \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$ .

On en déduit de même que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ .

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



**Question 3**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$

$e$   
  $\frac{1}{e}$

$+\infty$   
  $1$

**Explication :**  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ .

Or,  $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ . On pose  $h = \frac{1}{x}$  ( $h$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ) On a  $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 1$ .

Ainsi, par composition,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

**Question 4**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} =$

$\frac{1}{2}$   
  $2$

$1$   
  $0$

**Explication :**  $\frac{\tan(2x)}{x} = 2 \times \frac{\tan(2x)}{2x}$ . On pose  $h = 2x$ . ( $h$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0).

De plus,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h)}{h} = 1$  (nombre dérivé).

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} = 2$

**Question 5**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 + x}{x^5 + x^3} =$

$0$   
  $-\infty$

$1$   
  $+\infty$

**Explication :**  $\frac{x^7 + x}{x^5 + x^3} = \frac{x^7 \left(1 + \frac{1}{x^6}\right)}{x^5 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x^2 \times \frac{1 + \frac{1}{x^6}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow +\infty$