Prénom : **Nom:**

Calculus – Évaluation 3

septembre 2023

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad z^2 = 1 + i$.

Solution:

On pose $z = x + iy$. Alors, $z^2 = 1 + i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

De plus, $|z|^2 = |z^2|$ donc $x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi,

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

Finalement,

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,;\, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right\}.$$

2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Donc les deux racines carrées de $1 + i$ sont, $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$. En identifiant les formes algébriques et les formes trigonométriques, on obtient :

$$\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De même, on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$