Prénom : **Nom:**

Calculus – Évaluation 2

septembre 2023

1. Démontrer le théorème suivant : Soient a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solution:

Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\underbrace{z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la règle du produit nul :

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-\delta}{2a}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad z^2 + 2iz - i = 0$.

Solution:

$\Delta = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4 \times 1 \times (-i) = -4 + 4i$. D'après le cours, Δ admet deux racines carrées : on pose alors $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
On a $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Ainsi,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -4 \quad (1) \\ 2xy = 4 \quad (2) \end{cases}$$

De plus, $|\delta^2| = |\delta|^2$ ce qui implique :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}. \ (3)$$

On en déduit alors, par somme des égalités (1) et (3) :

$$2x^2 = -4 + \sqrt{32}$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{4 + \sqrt{32}}{2}} = \pm\sqrt{2\sqrt{2} + 2}$$

De l'égalité (2), on déduit :

$$y = \frac{4}{2x} = \pm\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

Ainsi, il suffit de prendre

$$\delta = \sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

. Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \left(-1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)i$$

et

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \left(-1 - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}\right)i$$