

Calculus – Évaluation 1

septembre 2023

1. Donner en justifiant le développement de $(a + b)^3$.

Solution:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\
 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

2. Calculer le module de $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$

Solution:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante :

$$\frac{z + i}{z - i} = 2 + i$$

Solution:

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{z + i}{z - i} = 2 + i &\iff (z + i) = (2 + i)(z - i) \\
 &\iff z + i = 2z - 2i + iz + 1 \\
 &\iff -1 + 3i = (1 + i)z \\
 &\iff z = \frac{-1 + 3i}{1 + i} \\
 &\iff z = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\
 &\iff z = \frac{2 + 4i}{2} \\
 &\iff z = 1 + 2i
 \end{aligned}$$