TD n° 7 : Calcul Intégral et équations

Exercice 1 (Primitives de fractions rationnelles). Calculer les primitives des fonctions f_i, en identifiant d'abord les réels a_j permettant de satisfaire les égalités ci-dessous pour tous les éléments du domaine de définition :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{x^3-2x}{x+1} = a_1x^2+a_2x+a_3+\frac{a_4}{x+1},\\
f_2(x) &= \frac{1}{4x^2-4x-3} = \frac{a_5}{x-a_6}+\frac{a_7}{x-a_8},\\
f_3(x) &= \frac{x^2-4x+6}{x^2+1} = a_{12}+a_{13}\frac{2x}{x^2+1}+a_{14}\frac{1}{x^2+1},
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Fraction rationnelle).

1. Déterminer grâce à une division euclidienne les constantes a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 telles que

$$x^4+1 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + a_4(x-2)^4$$

2. En déduire une primitive de $f(x) = \dfrac{x^4+1}{(x-2)^3}$.

Exercice 3.

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\ dt$ par linearisation.
2. Exprimer la fonction $\sin 2t$ et $\cos 2t$ en fonction de $\tan(t)$.
3. Exprimer $\sin(4t)$ en fonction de $\tan(t)$.
4. Calculer $\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$ en effectuant le changement de variable $x = \tan t$.
5. Calculer $\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x^2)^3}\ dx$ en effectuant le changement de variable $x = \tan t$.
6. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}\ dx$ par un changement de variable.
7. En intégrant par parties, donner une relation de récurrence entre les primitives suivantes et retrouver les résultats précedents

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n\ dx} \text{ et } \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}\ dx}$$

Exercice 4.

1. Calculer $\sin^5 2t$ en fonction d'une somme de fonction de type $t \to \cos(kt)$ et $x \to \sin(kt)$
2. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2t\ dt$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 2t\ dt$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\cos(2t)\ dt$.

Exercice 5 (Variation de la constante).

1. Donner toutes les solutions l'équation $y'(x)+y(x)=0$ sur $I=\mathbb{R}$.
2. Donner les solutions qui vérifient respectivementn $y(0)=0, y(0)=-1$ et $y(0)=1$. Tracer ces fonctions.
3. Donner toutes les solutions de $y'(x)+y(x)=2\sin x$ sur $I=\mathbb{R}$ par la technique de la variation de la constante. Déterminer les solutins qui vérifient $y(0)=0, y(0)=1$ et $y(0)=-1$.
4. Refaire le même exercice avec l'équation

$$y'(x)-y(x)=(x+1)e^x \text{ sur } I=\mathbb{R}$$

Exercice 6 (Séparation de variables). Résoudre les équations différentielles sur les intervalles I indiqués :

$$xy'-2y=x^3, I=\mathbb{R}_+^* \text{ et } y'+y\tan x=\sin 2x, I=]-\pi/2,\pi/2[$$

$$y'(x^2+1)+2xy=3x^2+1, I=\mathbb{R}$$

Exercice 7. Soit la fonction f définie, pour tout x réel, par : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$. Calculer $f'+f$. En déduire une primitive de f.

Exercice 8. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle considéré :

$$f'+f=\cos x \text{ pour } x\in\mathbb{R},$$
$$f'(1-x^2)+2xy=1 \text{ pour } x\in]1,+\infty[,$$
$$f'-2f=e^x \text{ pour } x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 9. On cherche à résoudre, pour $x\geq 1$,

$$x^2f'(x)=f^2(x)-2xf(x)+2x^2, \qquad f(1)=0.$$

1-On pose $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Montrer que g satisfait l'équation

$$xg'(x)=g^2-3g+2, \quad g(1)=0$$

2-Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{z^2-3z+2}$ et trouver la fonction $g(x)$.
3-Résoudre l'équation de départ.