TD n^{o} 6 : Calcul Intégral

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes (en vérifiant que l'intervalle sur lequel on intègre est bien contenu dans le domaine où la fonction à intégrer est définie et continue).

$$\int_2^3 (3t^2+1)\,dt,\qquad \int_0^{\pi/4} \frac{5}{\cos^2 t}\,dt,\qquad \int_{-1}^{2} |t|\,dt,\qquad \int_0^1 \frac{t}{t-2}\,dt,$$
$$\int_0^1 \frac{t}{2t+1}\,dt,\qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\arctan t}{1+t^2}dt,\qquad \int_1^2 \frac{\ln^3 t}{t}\,dt,\qquad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Exercice 2 (Primitives usuelles). Calculer une primitive de la fonction :

1. $f_1(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$,
2. $f_2(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x+1}}$
3. $f_3(x) = \frac{2x^2-x-1}{(4x^3-3x^2-6x+11)^5}$
4. $f_4(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$,
5. $f_5(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$.
6. $f_6(x) = \frac{\sin(\arctan x)}{1+x^2}$
7. $f_7(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$
8. $f_8(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2(x)}$

Exercice 3 (Intégration par parties I). A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx \text{ et } \int_0^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 4 (Intégration par parties II). Déterminer une primitive des fonctions suivantes par une intégration par parties :

$$x \mapsto \arctan(x) \quad x \mapsto (\ln x)^2 \quad x \mapsto \sin(\ln x),$$

Exercice 5. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ (on fera une intégration par partie).

Exercice 6 (Changement de variable I). En effectuant le changement de variable demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ en posant $x = \cos t$.
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ en posant $x = \ln t$.

Exercice 7 (Changement de variable II). En effectuant le changement de variable demandée, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ en posant $x = e^t$.
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$.