**L1**
**Calculus**

**Université Gustave Eiffel**
**Année 2023–2024**

# TD n$^{o}$ 5bis : Dérivées des fonctions d'une variable

**Exercice 1.**

1. En calculant les constantes $a_0$ et $a_1$ pour des fonctions dérivables dans l'expression $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)h(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$ déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{\tan(2x^2 - 8)}{x^2 - 4}$$

2. Déterminer l'équation de la droite tangente des fonctions$f$ et$g$ données par $f(x) = \ln(1 + 3x)$ et $g(x) = \sin(3x)$ en $x = 0$.

**Exercice 2.**

1. Déterminer l'équation de la droite tangente aux courbes des fonctions $f$ et $g$ données par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = ax^2 + b$ en $x = 1$
2. Déterminer les réels $a$ et $b$ de manière à ce que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante soit dérivable sur $]0, +\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Exercice 3 (Valeur Absolue.)** Etudier la dérivabilité et l'existence de la droite tangente en $x = 0$ des fonctions $f_1$ et $f_2$ :

$$f_1(x) = |x| \text{ et } f_2(x) = x|x|$$

**Exercice 4 (Étude d'une fonction puissance).**

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de la fonction $f$ donnée par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et déterminer les limites de $f$ aux bornes de $D$.
2. Tracer le tableau de variation de $f$ et donner le signe de $f$ sur $D$.
3. Déterminer le domaine de définition de $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1+\frac{1}{x}}$.
4. Calculer la dérivée de $h$ et donner son tableau de variation avec les limites aux bornes de son domaine de définition.

**Exercice 5 (Calcul de dérivées).** Dériver les fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition et un ensemble sur lequel elle est dérivable) ainsi que les zeros de la fonction dérivée :

1. $f_1(x) = \frac{x-1}{x+2}$,
2. $f_2(x) = \frac{x}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 1}$
4. $f_4(x) = (4x^3 - 3x^2 - 6x + 11)^{-4}$
5. $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$,
6. $f_6(x) = \ln(1 + x^6)$
7. $f_7(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
8. $f_8(x) = (1 + \ln x)^{3/2}$
9. $f_9(x) = \sqrt{e^x + 1}$
10. $f_{10}(x) = (2 + 3x)^{\sqrt{x}}$

**Exercice 6 (Asymptotes obliques).** Déterminer l'équation des asymptotes à l'infini quand elles existent

$$\text{a) } f(x) = \tfrac{-3x+4}{2x+3} \quad \text{b)} f(x) = \tfrac{x(2x-3)^2}{(x-2)^2} \quad \text{c) } f(x) = \tfrac{2x^2+x\sqrt{x}}{x+3}$$

**Exercice 7 (Dérivées successives.)** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à tout ordre et $g, h, i$ les fonctions définies par $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = f(\frac{1}{x})$ et $i(x) = exp(f(x))$ Calculer $g', g'', g''', h', h'', h''', i', i'', i'''$ en fonction de $f', f'', f'''$.

**Exercice 8.** Soit $(a + ib)$ une racine n-ième de l'unité et $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$. Donner une formule simple de la n-ième dérivée $f^{(n)}$.

**Exercice 9.** Pour toute fonction $f$, $n$-fois dérivables sur un intervalle $[a, b]$, il existe une fonction $h$ sur $[a, b]$ telle que $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ et pour tout $x, x_0 \in [a, b]$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n h(x).$$

1. Appliquer la formule à la fonction $f_1$ donnée par $f_1(x) = e^x$ en $x_0 = 0$
2. Appliquer la formule à la fonction $f_2$ donnée par $f_2(x) = (\sin x)^3$ en $x_0 = 0$.
3. En déduire
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2}{(\sin x)^3}.$$

**Exercice 10 (Fonction réciproque trigonométrique).**

1. Donner le domaine de définition est l'image de la fonction
$$x \to \arcsin x$$
2. Donner les valeurs de $\arcsin(\sin\left(\frac{18\pi}{5}\right))$ et $\arcsin(\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right))$.
3. Les valeurs de
$$\tan(\arctan(1/2)) \text{ et } \sin(\arcsin\frac{1}{3}).$$
4. En exprimant $\cos^2(x)$ en fonction de $\tan^2(x)$, montrer que
$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

**Exercice 11 (Etude de fonction Réciproque).** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction $f$ est-elle continue en $x = 0$ ?
2. Calculer la dérivée à droite et à gauche en $x = 0$ ? La fonction $f$ est-elle dérivable en $x = 0$ ?
3. En utilisant un changement de variable, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. On considère la fonction $g(x) = \frac{x}{x^2+1} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Tracer le tableau de variation de la fonction $g(x)$ et déterminer son signe sur $]0, +\infty[$.
5. Déterminer la dérivée $f'(x)$ et déterminer son signe sur $]0, +\infty[$ . Tracer le tableau de variation de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la fonction $f(x)$.