
TD n° 5 : Calculs de limites

Exercice 1 (Méthodes algébriques).

1. Calculer les limites suivantes. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x - 1}{(x - 1)^3}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$.

Exercice 2 (Encadrement). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\cos(1 + 1/x) - 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(e^x) \sin(e^{-x}).$$

Exercice 3 (Croissances comparées).

1. Grâce aux changements de variables indiqué, déduire successivement les limites suivantes en utilisant le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x^2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (x = y^2), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad (x = 1/y).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (y = e^x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad (y = -x).$$

2. Montrer plus généralement que pour tous $a, b > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a |\ln(x)|^b = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

3. **Application** : Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^e}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x|)e^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

Exercice 4 (Facteur dominant). Déterminer le facteur dominant des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles suivantes, puis calculer les limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + e^{3x}}{x + 2x^2 + e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 + (\ln x)^4}{1 + x + x^2 + x^3 + (\ln x)^5}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^2(x - 3)(x^2 + 2)}{(3x + 1)^3 \sqrt{x^2 + 1}(2x - 1)}.$$

Exercice 5 (Calcul des dérivées). En utilisant le calcul des dérivées que l'on admettra, calculer si possible les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{x - \pi/4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 6 (Règle de l'Hôpital). En utilisant le calcul des dérivées, calculer les limites suivantes quand c'est possible :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + 2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sin x},$$

Exercice 7 (Valeurs absolues). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 + x - 3| - |3x^2 + 4x + 1|}{|2x + 1| - |x + 5|}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^3 + e^x - e^{-x}| - |x^3 - e^x - 3x|.$$

Exercice 8 (Puissances généralisées). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 9 (Un calcul trigonométrique).

1. Exprimer $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$.
2. Utiliser le calcul ci dessus pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Exercice 10 (Limites non existantes). Justifier que les limites suivantes n'existent pas.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 3}{x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x).$$

Entraînement

Exercice 11. Calculer les limites suivantes, **en expliquant précisément la méthode employée.**

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (\ln x)^3}{x^4 e^{-x} + x^2}$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) - \ln(x)$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (\ln x)^3}{x^4 e^{-x} + x^2}$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + (\ln(x + 1))^4}{(x^3 - \sqrt{x} \ln x)}$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln(x)}{x}$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 2}}$</p> | <p>10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 + (\ln x)^4}{1 + x^2 + x^3 + (\ln x)^5}$</p> <p>11. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \left(\cos\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)$</p> <p>12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$</p> <p>13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \sin(1/x)$</p> <p>14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1 + 2x)}$</p> <p>15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - 1}{x^2}$</p> <p>16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + e^{3x}}{x + 2x^2 + e^x}$</p> <p>17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}$</p> |
|---|---|