L1 **Université Gustave Eiffel**
Calculus **Année 2023–2024**

TD n° 3 : Fonctions Usuelles

Fonctions Trigonométriques

Exercice 1. On considére la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. On note Γ sa courbe représentative dans le plan.

1. Quelle est le domaine de définition de f ? Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur Γ.
2. Déterminer la dérivée de f sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et donner son tableau de variation
3. Construire Γ.

Exercice 2. On considére la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$. On note Γ sa courbe représentative dans le plan.

1. Quelle est le domaine de définition de f ? Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$.
2. Calculer sa dérivée et établir son tableau de variation,
3. Construire Γ.

Fonctions Polynomiales

Exercice 3. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme

$$P = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + ax + b \text{ admette comme racine 2 et} -3.$$

Exercice 4.

1. Déterminer Q_1, Q_2 tel que $z^2 - z_0^2 = (z-z_0)Q_1(z)$ et $z^3 - z_0^3 = (z-z_0)Q_2(z)$.
2. Si $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ et si $P(z_0) = 0$, déterminer Q_3 en fonction de z_0, a, b, c, d tel que
$$P(z) = (z-z_0)Q_3(z)$$

Exercice 5 (Division Euclidienne.) Effectuer la division Euclidienne de

1. $P_1(x) = x^4 - x^2 - 2x - 8$ et $Q_1(x) = x^2 - 4$ et calculer
$$\lim_{x\to+2} \frac{x^4 - x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4} \text{ et } \lim_{x\to-2^+} \frac{x^4 - x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$$
2. $P_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ et $Q_2(x) = (x-3)(x+1)$ et calculer
$$\lim_{x\to+3^+} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 4}{(x-3)(x+1)} \text{ et } \lim_{x\to+3^-} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 4}{(x-3)(x+1)}$$
3. $P_3(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ et $Q_3(x) = (x-1)^3$ et calculer
$$\lim_{x\to+1^+} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{(x-1)^3}$$

Fonctions Logarithmes

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes

1. $\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2=0$
2. $\ln(x+2)-\ln(x+1)=\ln(x-1)$

Exercice 7. On considère les fonction $f(x)=x-\ln(1+x)$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$

1. Étudier ces fonctions sur $[0,+\infty[$ et donner le tableau de variation.
2. En déduire l'inégalité pour $x\geq 0$

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x.$$

Exercice 8. On considère la fonction réelle $f(x)=x-\ln(x)$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
2. Donner la dérivée de la fonction $f(x)$ et faire son tableau de variation
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)/x^2$.

Fonctions par morceaux et Valeur Absolue

Exercice 9.

1. Tracer la fonction $x\to|x+2|$ et $x\to|2x-5|$ puis déterminer le domaine de définition de
$$f_1(x)=\ln(|x+2|-|2x-5|)\text{(on pourra exprimer } f_1(x) \text{ par morceaux)}$$
2. Tracer la fonction $x\to|x-3|$ et $x\to|x-5|$ puis déterminer le domaine de définition de $f_2(x)=\frac{1}{|x-3|-|x-5|}$
3. Déterminer le domaine de définition de $f_3(x)=\sqrt{7-|x+1|}$ et $f_4(x)=\sqrt{|x+1|-7}$
4. Déterminer le domaine de définition de $f_5(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{7-x}-(x+5)}$

Limites usuelles

Exercice 10 (Calcul de limites). Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos(x)}{x},\qquad \lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}},\qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan(x),\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{x}.$$

Exercice 11 (Fonction puissance). Pour $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, on définit $a^b=e^{b\ln(a)}$.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}x^a$ et $\lim_{x\to0}x^a$, en discutant selon a.
2. Soit $a>0$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}a^x$ et $\lim_{x\to-\infty}a^x$, en discutant selon a.
3. Que vaut $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2}-1)^x$?