TD n° 2 : Nombres complexes II

Forme trigonométrique

Exercice 1.

1. Donner le module et l'argument de $z = \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(8+8i)}{1+i\sqrt{3}}$
2. Donner la forme algébrique de z.
3. En déduire une expression algébrique de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation $z^2 = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique.
2. Donner la forme trigonométrique des solutions.
3. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$. Comparer le résultat avec l'exercice précédent.

Formule d'Euler et trigonométrie

Exercice 3 (Addition et formule d'Euler).

1. Montrer en utilisant la formule d'Euler que pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\frac{(a-b)}{2}e^{i(a+b)/2}.$$
2. Déduire de cette formule le module et l'argument de
$$z_1 = 1 + e^{i\pi/4} \quad z_2 = e^{i\pi/3} + e^{i\pi/4} \quad z_3 = -1 + e^{i\pi/3}$$

Exercice 4 (Équation trigonométrique).

1. On considère le nombre complexe $z_1 = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta_0}$ où a, b et θ_0 sont des nombres réels et $z_2 = e^{ix}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du produit $\bar{z}_1 z_2$.
2. Montrer que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \theta_0)$
3. Appliquer cette formule pour résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

Exercice 5. Montrer les formules trigonométriques suivantes en utilisant la formule d'Euler :

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Formule du binôme - linéarisation - calcul de sommes

Exercice 6 (Linéarisations et Développements-Formule de Moivre).

1. Ecrire les fonctions suivantes comme combinaison linéaire des fonctions $x \to \cos(kx)$ et $x \to \sin(kx)$:

$$\cos(x)^3, \qquad \sin(x)^5, \qquad \cos(2x)\sin(3x)^2 \qquad \text{et} \ \sin(2x)^2\cos(2x)^2 \ .$$

2. Trouver des fonctions polynomiales P et Q telles que, pour tout réel x, on ait

$$\sin(3x)\cos(2x) = \sin(x)P(\cos(x)) \qquad \text{et} \qquad \cos(4x) = Q(\cos(x)).$$

   Ecrire sous forme de somme de puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ les expressions suivants :

Exercice 7 (Formule du binôme). En utilisant la formule du binôme, déterminer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx).$$

Racine n-ième

Exercice 8. Écrire sous forme trigonométrique les solutions complexes de

$$z^9 = -512i \qquad z^6 = -4/(1+i\sqrt{3}) \qquad z^5 = (1+i\sqrt{3})^4/(1+i)^2$$

Représenter ces racines par des points dans le plan.

Exercice 9. On considère $\{1, j, j^2\}$ les racines de l'équation $z^3 = 1$.

1. Résoudre l'équation $u^2 + u + 1 = 0$ puis l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.
2. Donner les racines quatrièmes de j sous forme algébrique.
3. En déduire une factorisation de $P(z) = z^8 + z^4 + 1$ comme produit de quatre polynômes de degré deux sans racine réelle.

Exercice 10. On considère l'équation $z^5 - 1 = 0$.

1. Déterminer la fonction polynomiale $Q(z)$ telle que $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$.
2. Déterminer des réels a, b et c telle que

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c.$$

3. Résoudre l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
4. Résoudre $Q(z) = 0$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/5), \cos(2\pi/5), \cos(4\pi/5)$ ainsi que $\sin(\pi/5), \sin(2\pi/5)$ et $\sin(4\pi/5)$.