TD n° 1 : Nombres complexes I

Forme algébrique

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes et donner la solution sous la forme algébrique ($i.e.$ $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$) :

$$1)\ 3 + 6i = (3 - 4i)z \qquad 2)\frac{z-1}{z+1} = i \qquad 3)z = \frac{2+5i}{(1-i)} + \frac{2-5i}{(1+i)}$$

Exercice 2.

1. Calculer i^2, i^3, i^4 puis donner la forme algébrique de $i^{10}, i^{2019}, (-i)^{23}$
2. Soient x, y deux nombres réels et $z = x + iy$. Donner en fonction de x et y la forme algébrique de : $Z_1 = z^2, \qquad Z_2 = z^3, \qquad Z_3 = \frac{1-i}{z}$.

Exercice 3.

1. Donner le module des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{2}, \quad Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}, \quad Z_3 = \frac{1}{2}(2 + i\sqrt{2}).$$

2. Calculer le module de $z = \frac{8-6i}{1+i\sqrt{3}}$
3. Calculer de le module de $z = x + iy$ si $z^2 = 8 - 6i$
4. Calculer de le module de $z = x + iy$ si $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

Racines Carrées d'un nombre complexe

Exercice 4 (Calcul d'une racine carrée réelle).

1. Trouver les solutions complexes des équations $z^2 = 9$, $z^2 = -25$ et $z^2 = -3$.
2. Trouver les solutions complexes des équations

$$z^2 + z - 1 = 0 \text{ et } z^2 + z + 1 = 0$$

3. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 puis $j^{10}, (-j)^{23}$ et j^{2021}.

Exercice 5 (Calcul d'une racine carrée complexe).

1. Donner la partie réelle et imaginaire de l'expression $(x + iy)^2 = 8 - 6i$
2. Que vérifie x et y si $|x + iy|^2 = |8 - 6i|$
3. Donner le système d'équation que satisfait x et y si $(x + iy)^2 = 8 - 6i$. On dit que $z = x + iy$ est une racine carrée de $8 - 6i$.

Exercice 6 (Racine carrée complexe et changement de variable).

1. Calculer, sous la forme $x + iy$, les racines carrées de $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. En posant $Z = z^2$, résoudre l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 7 (Equation de degré 2).

1. Calculer le discriminant Δ de l'équation
$$z^2 + (3-6i)z - 8 - 6i = 0$$
2. Donner les racines carrées de Δ
3. Déterminer les solutions de l'équation.
4. En effectuant le changement de variable $Z = z^2$, résoudre l'équation
$$z^4 + (3-6i)z^2 - 8 - 6i = 0$$

Exercice 8 (Changement de variable).

1. Résoudre l'équation $z^2 - iz - 1 - i = 0$.
2. Résoudre l'équation $9z^4 - 3iz^2 - 1 - i = 0$.
3. Résoudre l'équation $4\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - i2\frac{z-1}{z+1} - 1 - i = 0$

Exercice 9. Déterminer les solutions sous la forme $a+ib$ des équations suivantes en cherchant le discriminant Δ et sa racine carrée δ :
$$(1+i)z^2 + (7-3i)z - 10i = 0, \qquad z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0,$$

Exercice 10. Résoudre l'équation suivante en commencant par en chercher une sous la forme $z = iy$ où y est réel : $z^2 + \left(-1 + i(1+\sqrt{2})\right) z - \sqrt{2}(1+i) = 0$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exercice 11 (Cercle trigonométrique I). Donner le module et et l'argument des nombres complexes suivants et les placer sur un schéma comprenant un cercle unité : 1, i, -1, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, $2-2i$, $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, $1+i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$, $-1+i\sqrt{3}$.

Exercice 12 (Cercle trigonométrique II). Donner la forme algébrique et trigonométrique des nombres complexes suivants :
$$z_1 = 2e^{2i\pi/3}, \quad z_2 = (2e^{i\pi/4})(e^{-3i\pi/4}), \quad z_3 = \frac{3e^{i\pi/3}}{2e^{5i\pi/6}}, \quad z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9.$$
$$z_5 = (3+3i)^3, \qquad z_6 = \left(\overline{\frac{1}{2i} + \frac{3}{2} - i}\right)^5 \qquad \text{et} \qquad z_7 = \left(\frac{1-i}{4}\right)^{98}.$$