TD 4 : Matrices

1 Calculs matriciels

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer, lorsque cela a un sens, les produits matriciels AB, BA, A^2, B^2, ${}^tBA$, A^tB.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $n \geqslant 1$, calculer A^n.

Exercice 3. Soit a et b deux réels et soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

Exercice 4. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A: $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A), \quad \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$
En déduire que, pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a : $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.
2. Existe-t-il des matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

2 Inverses d'une matrice

Exercice 5. Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Trouver une relation linéaire entre A^2, A et I_2 faisant intervenir les coefficients de A.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible. Donner alors l'expression de A^{-1}.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est combinaison linéaire de A et de I_2.

4. On suppose que la somme des éléments diagonaux de A est non nulle. Montrer, pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, l'implication $A^2B = BA^2 \Longrightarrow AB = BA$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver trois réels a, b et c tels que $A^3 + aA^2 + bA + c\mathrm{I}_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de la matrice A^n.

Exercice 9. On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ -7 & -8 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer l'inverse de P.
2. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 10. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.

3 Application linéaire et représentation matricielle

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, par $f(P) = P' + P$. Écrire la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

Exercice 12. Soit f l'application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par :

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de f par rapport la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Donner la matrice, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection vectorielle sur $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\}$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\big(\{(1, 2, 3)\}\big)$.

Exercice 14. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$, où :

$$\mathcal{B}_1 = \big\{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\big\}, \quad \mathcal{B}_2 = \big\{(3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)\big\}.$$

Exercice 15. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Posons $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ la famille définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

1. Que valent $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$?
2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice D de f par rapport à $\mathcal{B}'$.
3. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(P) = \big(P(0), P'(0), P(1), P'(1)\big).$$

1. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. On pose $P_1 = (2X+1)(X-1)^2$, $P_2 = X(X-1)^2$, $P_3 = (3-2X)X^2$, $P_4 = X^2(X-1)$. Montrer que la famille $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer la matrice de f par rapport à cette base et la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
4. Montrer que l'application f est bijective.
5. Soit a, b, c, d quatre réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $Q(0) = a$, $Q'(0) = b$, $Q(1) = c$ et $Q'(1) = d$.

Exercice 17. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Indication* : on pourra commencer par montrer que $\dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 2$.

4 Rang d'une matrice

Exercice 18. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Montrer que A peut s'écrire comme la somme de r matrices de rang 1.