Université Gustave Eiffel | **Licence L1**
2ème semestre 2022/2023 | **Algèbre linéaire**

TD 3 : Applications linéaires

1 Généralités

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

- Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f_1\big((x,y)\big) = (x+y, x-y), \quad f_2\big((x,y)\big) = (x, y+1), \quad f_3\big((x,y)\big) = (x, y^2).$$

- Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_4\big((x,y)\big) = x, \quad f_5\big((x,y)\big) = xy, \quad f_6\big((x,y)\big) = |x+y|.$$

- Les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_7(P) = P(1), \quad f_8(P) = X + P(X).$$

- Les applications de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ dans lui-même définies par :

$$f_9(h) = h', \quad f_{10}(h) = h \circ g, \quad f_{11}(h) = g \circ h,$$

  où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée, pour tout x réel, par $g(x) = x^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $f(z) = \overline{z}$. f est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ? f est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par $f\big((x,y)\big) = (x+y, x-y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par $f\big((x,y)\big) = (2x-y, x+y)$

1. f est-elle linéaire ?
2. Prouver que $f \circ f = 3(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. En déduire que f est bijective et calculer f^{-1}.

Exercice 5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, on considère les trois formes linéaires f_1, f_2, f_3 définies, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f_1\big((x,y,z)\big) = -x+y+z, \quad f_2\big((x,y,z)\big) = 2x-y-z, \quad f_3\big((x,y,z)\big) = x+2y+z.$$

Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z = 0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big(\{(1,3,1)\}\big)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la projection vectorielle sur F parallèlement à G.
3. Déterminer la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

2 Noyau, image, rang

Exercice 7. Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer une base du noyau et une base de l'image et étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (y - z, z - x, x - y)$;
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$;
3. $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(1), P(-1), P'(0))$.

Exercice 8. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f\big((1, 0, 0)\big) = (0, 1), \qquad f\big((1, 1, 0)\big) = (1, 0), \qquad f\big((1, 1, 1)\big) = (1, 1).$$

Calculer $f((x, y, z))$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 9. Soit $\phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par $\phi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et préciser son noyau.

Exercice 10. Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit ϕ l'application définie, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par $\phi(f) = g$, où g est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'il est injectif mais non surjectif.

Exercice 11. On considère l'ensemble F des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soit $f : F \to \mathbb{R}^2$ telle que $f\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) = (u_0, u_1)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. En déduire que f est un isomorphisme puis la dimension de F.
5. Posons $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\big\{(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}\big\}$ est une base de F.
6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Déterminer le terme général de cette suite.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 5 muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = 0_E, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_1 + e_2, \quad f(e_4) = 2e_1 - e_2, \quad f(e_5) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4.$$

1. Montrer que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Déterminer le rang de f et le rang de f^2. En déduire la dimension du noyau de f et celle du noyau de f^2.
3. Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par e_3 est un sous-espace vectoriel supplémentaire du noyau de f^2.

3 Un peu plus théorique

Exercice 13. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}(g)\big)$;
2. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f et g deux endomorphismes de E. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

On suppose de plus que $f+g$ est bijectif et que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

Exercice 16. Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui sont tels que $p+q$ est également un projecteur. Montrer que :

- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$;
- $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$: $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On suppose que $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
2. Montrer que la famille $\big\{x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big\}$ est libre.
3. Comparer p et n. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.