Université Gustave Eiffel **Licence L1**
2ème semestre 2023/2024 **Algèbre linéaire**

TD 2 : Espaces vectoriels de dimension finie

1 Famille libre, famille génératrice

Exercice 1. Préciser si les familles suivantes sont libres ou non dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels mentionnés :

- dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{F}_1 = \{(1,2),(3,5)\}$, $\mathcal{F}_2 = \{(1,2),(3,5),(6,6)\}$;
- dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = \{(1,2,3),(1,-2,-3),(-2,-4,-6)\}$, $\mathcal{F}_2 = \{(1,2,3),(1,-2,-3)\}$;
- dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_1 = \{X^2+1, X^2+X+1, X^2+X\}$, $\mathcal{F}_2 = \{X^2+1, X^2+X+1\}$, $\mathcal{F}_3 = \{3X^3-X^2+2X-3, 2X^3+X-2, X^3+X^2-1\}$.

Exercice 2. Les familles suivantes sont-elles :

- génératrices de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = \{(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathcal{F}_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, $\mathcal{F}_3 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\}$, $\mathcal{F}_4 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$, $\mathcal{F}_5 = \{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2),(0,1,1)\}$;
- génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F}_1 = \{X^2+1, 2X^2+1, X^2\}$, $\mathcal{F}_2 = \{X^2+1, X^2+X, X^2\}$?

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{P_1, \ldots, P_n\}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, échelonnée en degré, c'est-à-dire telle que $\deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n)$. Montrer que cette famille est libre.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels vérifiant $a_1 < \ldots < a_n$. Montrer que la famille $\{x \mapsto \mathrm{e}^{a_1 x}, \ldots, x \mapsto \mathrm{e}^{a_n x}\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2 Espace vectoriel de dimension finie, base

Exercice 5.

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$. Montrer que $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les composantes du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que la famille $\{(X-1)^2, X-1, 1\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donner les composantes des polynômes X^2 et $2X^2+X+1$ dans cette base.

Exercice 6.

- Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
- Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0 \text{ et } 2x-y+z = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, montrer que les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels, dont on donnera une base et la dimension :

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(2) = 0\}, \quad F_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(-X) = P(X)\}.$$

Exercice 8. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des suites arithmétiques en est un sous-espace vectoriel, dont on donnera une base et la dimension.

Exercice 9. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe a, b, c trois réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos x$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants: $F_1 = \mathrm{Vect}(\{u, v, w\})$, où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$,
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la famille $\{u, v, w\}$ est-elle liée ? Donner dans ce(s) cas une base de $E = \mathrm{Vect}\{(u, v, w)\}$.
2. Donner une base et la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et de $E \cap F$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ et $H_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer $H_1 \cap H_2$ et en donner une base $\mathcal{B}$.
2. En déduire les dimensions des sous-espaces vectoriels $H_1 \cap H_2$, H_1 et H_2.
3. Compléter la base $\mathcal{B}$ de $H_1 \cap H_2$ en une base de H_1 puis de H_2.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 3, 4), (2, 2, 3, 6), (0, 2, 4, 4)\}$ et
$G = \mathrm{Vect}\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1)\}$. Trouver une base et la dimension de $F + G$.

3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Exercice 14. Déterminer le rang des familles suivantes :

- dans $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F} = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 0), (0, 0, 2, 0)\}$;
- dans $\mathbb{C}[X]$: $\mathcal{F} = \{X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3\}$.

Exercice 15. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$, on considère les fonctions suivantes, données pour tout $x \in]-1, 1[$, par :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$?

Exercice 16. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que:

$$\max(\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1), \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2)) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) + \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2).$$