Université Gustave Eiffel — **Licence L1**
2ème semestre 2022/2023 — **Algèbre linéaire**

TD 1 : Espaces vectoriels

1 Généralités sur les espaces vectoriels

Exercice 1. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On définit une autre loi externe sur E par

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E : \quad \lambda \star x = \Re(\lambda)\cdot x.$$

L'ensemble $(E,+,\star)$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel?

Exercice 2. Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E\times E$ de l'addition usuelle $+_{E\times E}$ et de la multiplication externe par les complexes définie par : $(a+ib)\star(x,y) = (a\cdot x - b\cdot y, b\cdot x + a\cdot y)$. Montrer que $(E\times E, +_{E\times E}, \star)$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 3. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x\big\};\quad F_2 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^2\big\};\quad F_3 = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geqslant x\big\};$$

puis déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$G_1 = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\big\};\quad G_2 = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = -z\big\}.$$

Exercice 4. Dans $\mathbb{K}^3$, soit $F = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3 : x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+2xz = 0\big\}$. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$? On discutera selon que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Exercice 5. Parmi les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, lesquels en sont des sous-espaces vectoriels ?

- L'ensemble $\big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n\big\}$.
- L'ensemble $\big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique}\big\}$.

Exercice 6. Parmi les sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, lesquels en sont des sous-espaces vectoriels ?

- L'ensemble des fonctions dérivables en 0.
- L'ensemble des fonctions prenant la valeur 1 en 0.
- L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.

3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = \mathrm{Vect}(\{(1,0)\})$ et $G = \mathrm{Vect}(\{(0,1)\})$. Que vaut $F \cup G$? Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Plus généralement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 8. Soit F G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. On suppose que $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$ et que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$. A-t-on égalités ?

4 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

Exercice 9. Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (3,2,1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que le vecteur (x, y, z) appartienne au sous-espace vectoriel engendré par u et v.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, donner un système d'équations du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $u = (1,1,1,1)$ et $v = (1,2,-1,3)$.

Exercice 10.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire les sous-espaces vectoriels suivants sous forme de sous-espaces engendrés :
   - $F_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\big\}$;
   - $F_2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\big\}$.
2. Même question dans $\mathbb{R}_2[X]$ avec les sous-espaces vectoriels suivants:
   - $\big\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(2) = 0\big\}$;
   - $\big\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P'(1) = 0\big\}$.

Exercice 11. Soit A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des applications $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pouvant s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c$, avec a, b, c des réels.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit f et k les fonctions données, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \sin^2(x)$ et $k(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x/2)$. Appartiennent-elles à E? Quel est le sous-espace vectoriel engendré par f ?
3. Montrer que l'ensemble $\big\{x \mapsto a\cos^2(x) + b\sin^2(x/2), a, b \in \mathbb{R}\big\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est son intersection avec $\mathrm{Vect}\big(\{f\}\big)$?

5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exercice 13. Montrer que $F = \{(\alpha, \alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Écrire la division euclidienne de P par $(X - 1)(X + 1)$.
2. En déduire que $\mathbb{R}[X] = F + \mathbb{R}_1[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
4. En guise d'exemple, donner la décomposition du polynôme $X^3 + X + 1$ sur $F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 15. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puis en donner un supplémentaire.