CHERCHER # 5

On cherche les tangentes communes aux courbes C_f et C_g

$C_f : x \xmapsto{f} x^2$

$C_g : x \xmapsto{g} \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

Equation tangente :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

1 - Etude de la fonction f

$f(x) = x^2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x$

On établit l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - 2a^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$y = 2ax - a^2 .$$

2 - Etude de la fonction g

$g(x) = \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

On établit l'équation de la tangente à C_g au point b :

$$\begin{aligned} y &= g'(b)(x-b) + g(b) \\ &= -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b} \\ &= -\frac{1}{b^2}x + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b} .$$

3- Recherche des tangentes communes

On a obtenu :
$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ \text{et} \\ y = -\dfrac{1}{b^2}x + \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

(Une tangente commune est une ~~tangente~~ droite tangente à deux courbes. *

On a donc : $2ax - a^2 = -\dfrac{1}{b^2}x + \dfrac{2}{b}$

* Soit T une droite. T est une tangente commune à Cf et Cg ssi il existe deux réels a et b ($b \neq 0$) tels que T ait à la fois pour équation $y = 2ax - a^2$ et $y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

C'est à dire :
$$\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} \\ \text{et} \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4b^4} = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ -b = 8b^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ -1 = 8b^3 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2\times\frac{1}{4}} = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ b^3 = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2b^2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

On remplace maintenant a et b par leurs valeurs dans les équations des tangentes :

$$y = 2ax - a^2$$
$$= \boxed{-4x - 4}.$$

et

$$y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{4}}x + \frac{2}{-\frac{1}{2}}$$
$$= \boxed{-4x - 4}.$$

On retrouve les mêmes équations. Donc C_f et C_g ont pour tangente commune $y = -4x - 4$.