11

Soient $|Z|=1$ et $|Z'|=1$

$\Rightarrow$ Il existe θ et θ' réels tel que $Z=e^{i\theta}$ et $Z'=e^{i\theta'}$

$$\frac{Z+Z'}{1+Z.Z'} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\right)}$$

D'aprés la formule d'Euler :

$$\frac{Z+Z'}{1+Z.Z'} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$