Lycée Lucie Aubrac - TSTI2D

Chapitre 9
Trigonométrie

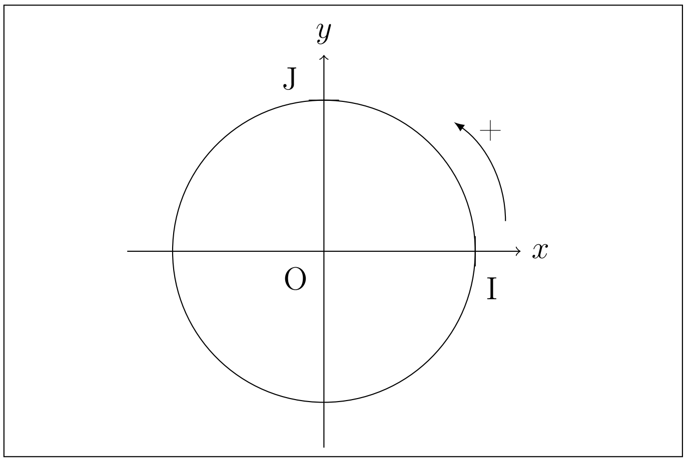
Table des matières

1 Cercle trigonométrique et repérage d'un point

1.1 Cercle trigonométrique

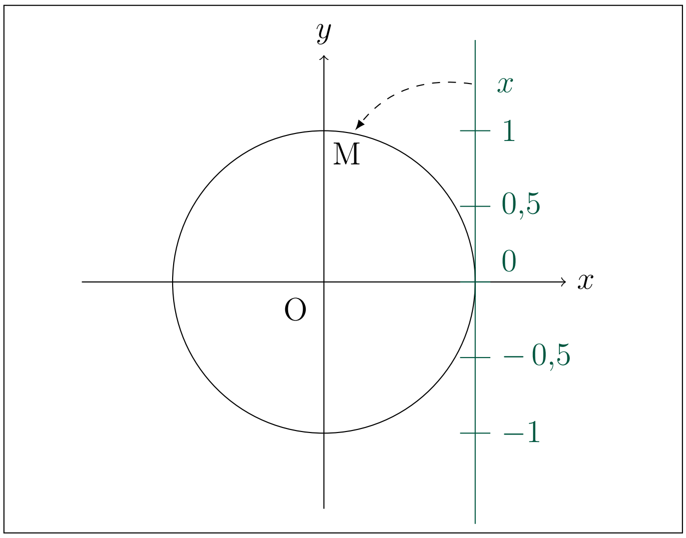
Définition 1

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé **sens direct** ou encore **sens trigonométrique**.



1.2 Repérage sur le cercle trigonométrique

Remarque.
On place la droite numérique perpendiculaire à (OI) telle que le 0 de la droite numérique coïncide avec le point I et on l'oriente dans le sens de O vers J (vers le haut). On enroule la demi-droite des réels positifs sur le cercle $\mathcal{C}$ dans le sens trigonométrique et la demi-droite des réels négatifs sur le cercle $\mathcal{C}$ dans le sens indirect.



Définition 2

À chaque nombre réel x de la droite numérique, on associe un unique point M du cercle trigonométrique que l'on appelle **point image** de x.

Proposition 1

Deux nombres réels x_1 et x_2 ont le même point image sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x_2 = x_1 + k \times 2\pi.$$

Démonstration.
Soit M un point du cercle trigonométrique. Les nombres réels ayant pour point image M sont obtenus en parcourant l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IM}}$ ainsi qu'un certain nombre de fois le cercle trigonométrique. La propriété découle alors directement du fait que le périmètre du cercle est 2π. □

2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Angle en radian sur le cercle trigonométrique

Définition 3

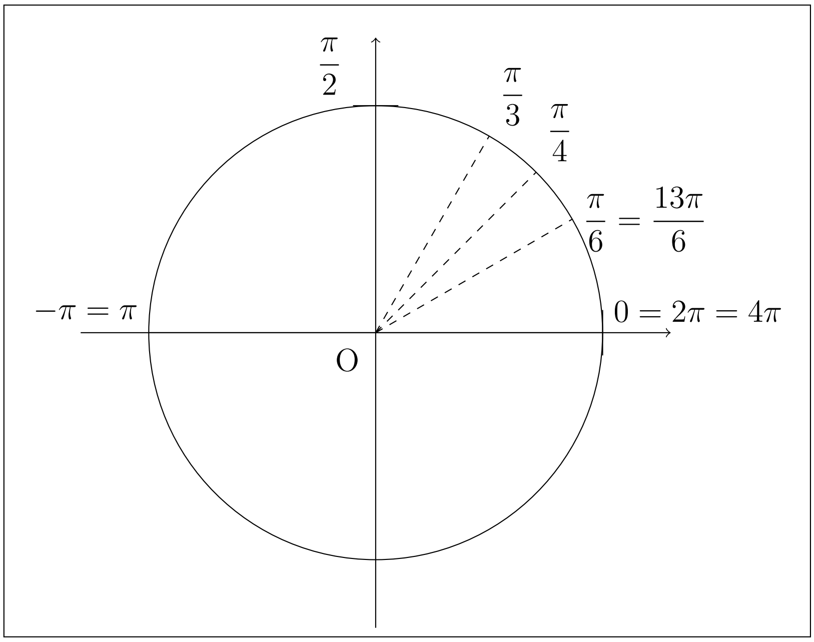
Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J})$ et M et N deux points de $\mathcal{C}$.

- Une mesure de l'angle au centre $\widehat{\mathrm{MON}}$ est donnée par la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$.
- Si x est une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{MON}}$, l'ensemble des mesures de $\widehat{\mathrm{MON}}$ est donné par :

$$x + k \times 2\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Remarque.

- La mesure d'un angle n'est pas unique. L'ensemble des mesures diffèrent de multiples de 2π.
- Le radian est noté rad. Lorsque la mesure d'un angle en radian est un multiple ou une fraction de π, on peut omettre la notation rad.



Méthode – Déterminer la mesure d'un angle en radian

On utilise la proportionnalité d'un angle en radian et en degré ($180° = \pi$ rad).

Exemple. Compléter le tableau suivant en donnant l'une des mesures de l'angle :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian						π		

Solution :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

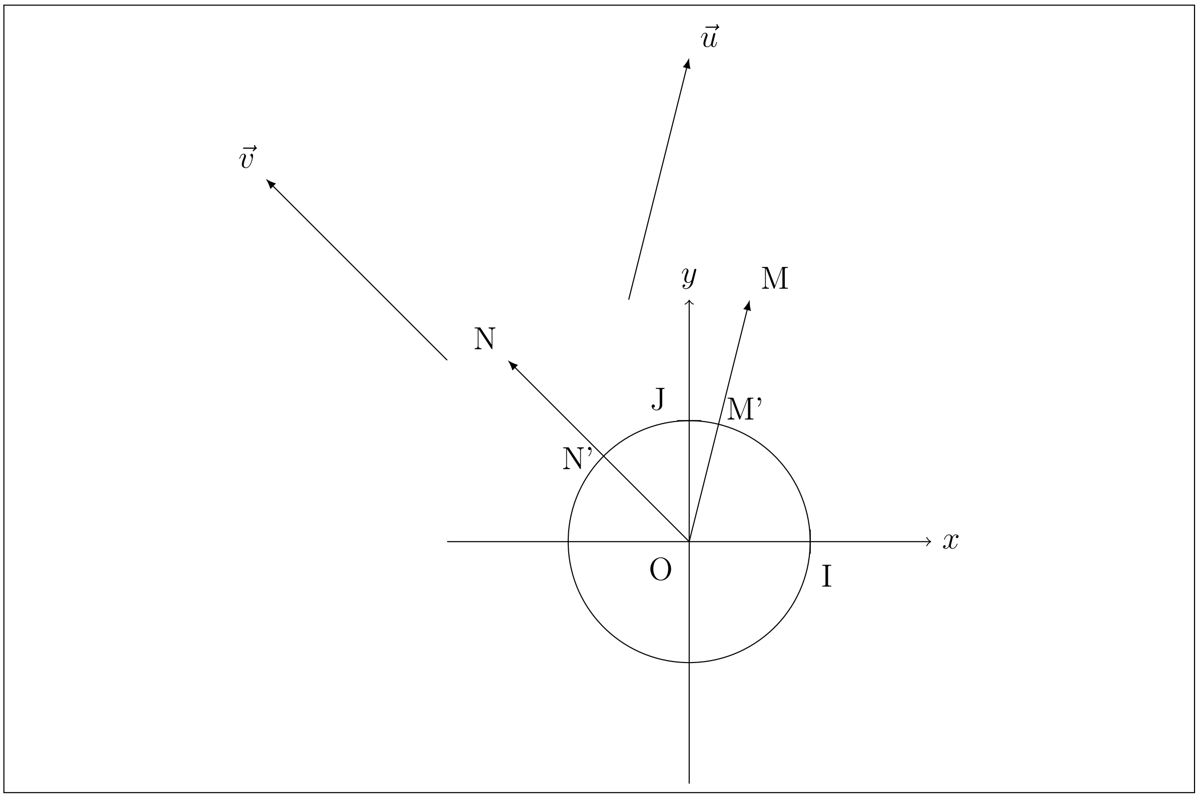
2.2 Angle orienté entre deux vecteurs

Définition 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont les représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine O. Soient M' et N' les points d'intersection des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique. Une mesure de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}\,;\vec{v})$, est définie comme étant une mesure de l'angle au centre $\widehat{\text{M'ON'}}$.

Remarque.

- Si M est le point image du réel x, alors $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = x$.
- Tout comme les angles définis sur le cercle trigonométrique, un angle orienté entre deux vecteurs a une infinité de mesures différentes.



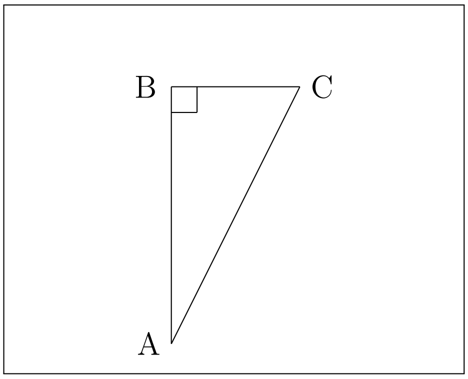
3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

3.1 Rappel : cosinus et sinus dans un triangle rectangle

Définition 5

Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :

- $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$
- $\sin\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AC}}$
- $\tan\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}}$

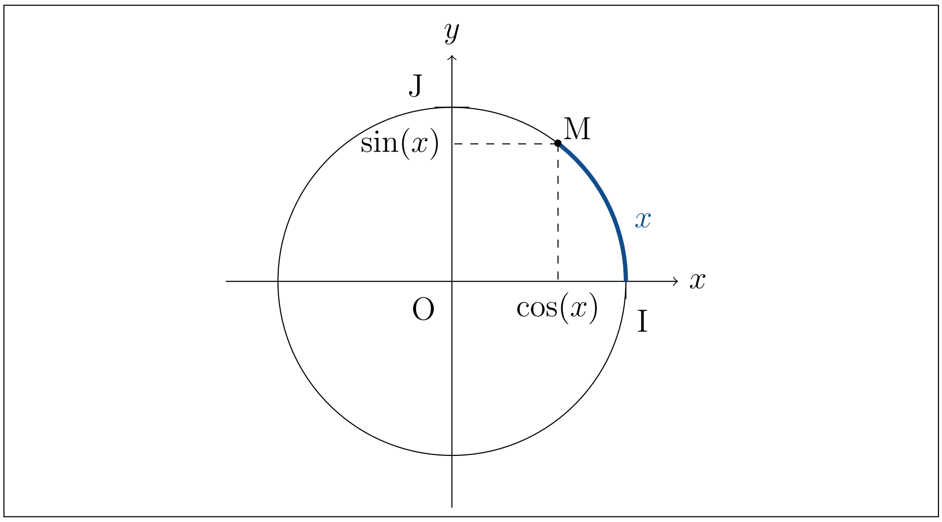


3.2 Définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel

Définition 6

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point image de x sur le cercle trigonométrique.

- L'abscisse du point M est appelée cosinus de x. On la note $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point M est appelée sinus de x. On la note $\sin(x)$.



Remarque.
Cette définition généralise la notion de cosinus et de sinus car, dans le cas d'un angle aigu, les définitions 6 et 7 coïncident.
En effet, si on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, on obtient, dans le triangle rectangle OHM :

$$\cos\left(\widehat{\text{HOM}}\right) = \frac{\text{OH}}{\text{OM}} = \text{OH} \quad (\text{car OM} = 1).$$

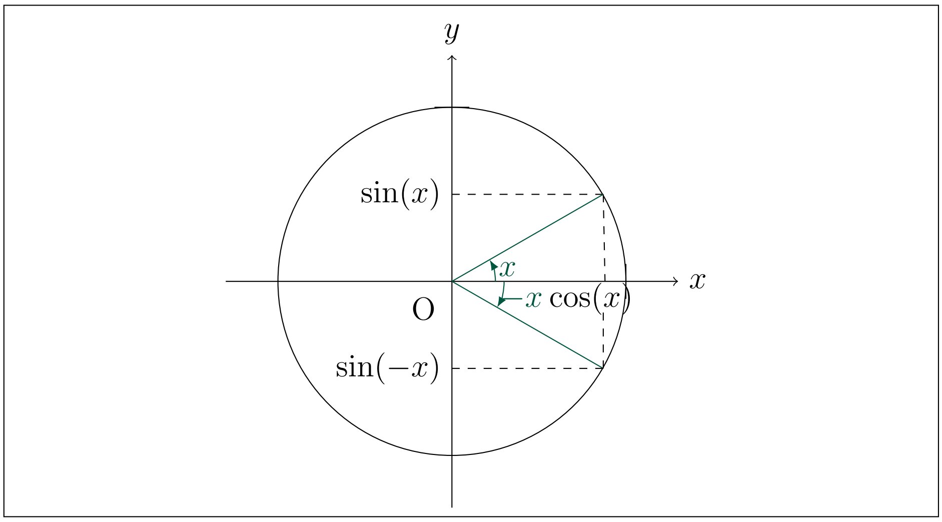
Proposition 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3.3 Formules des angles associés

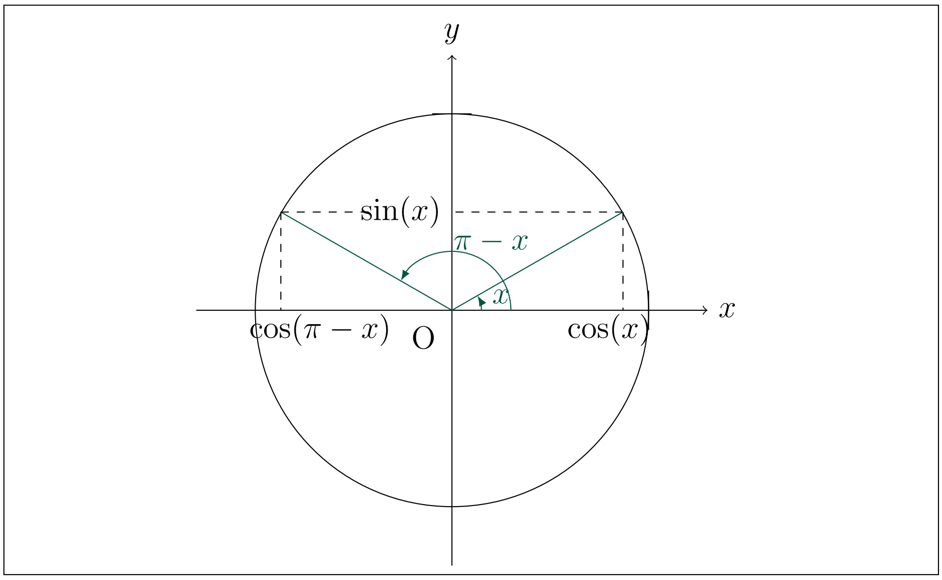
Proposition 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$



Proposition 4

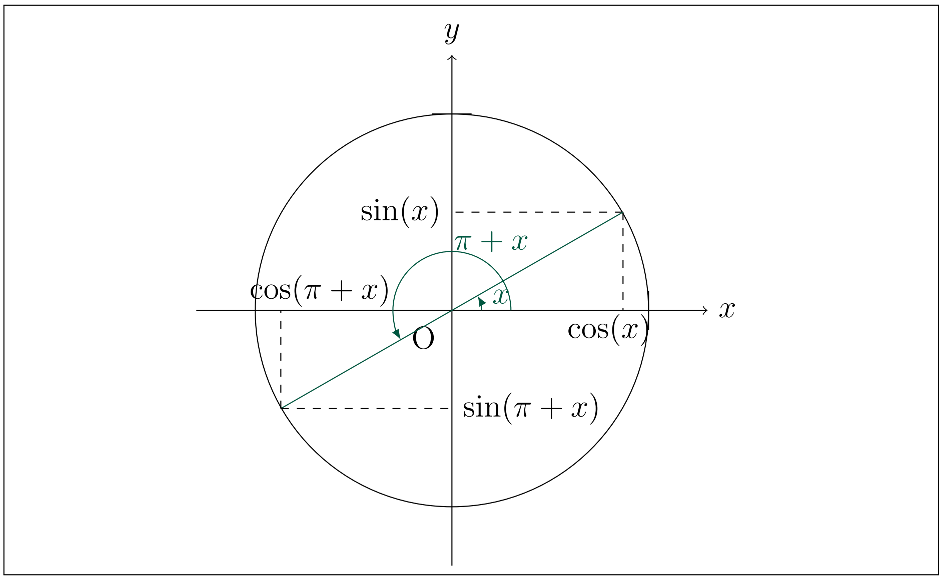
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$



Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$



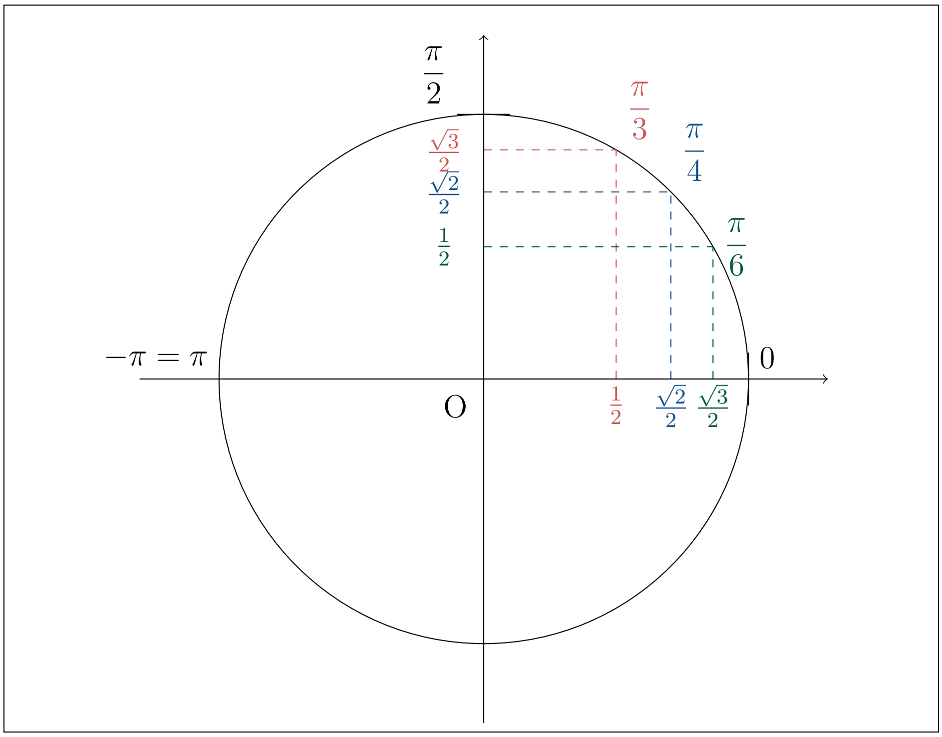
Remarque.
Les propriétés des angles associés (propriétés ci-dessus) ne sont pas à connaître par coeur mais doivent pouvoir être retrouvées très rapidement en faisant un dessin.

3.4 Valeurs remarquables

Les valeurs ci-dessous sont à connaître :

Proposition 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Méthode – Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel

- Faire un dessin : placer l'angle en question sur le cercle.
- Extraire du tableau ci-dessus les valeurs dont l'angle a le même dénominateur que celui considéré.
- Utiliser les formules des angles associées pour relier le cosinus ou le sinus recherché avec les valeurs du tableau.

Exemple.

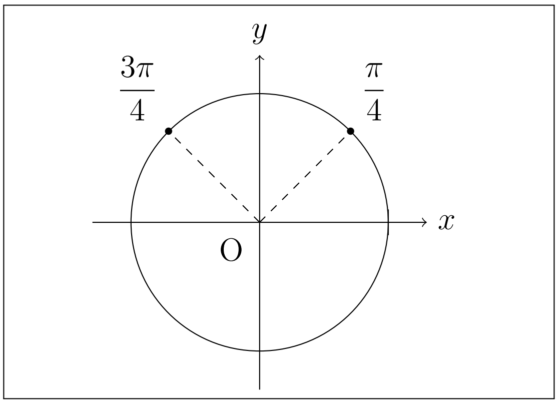
Déterminer $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solution :

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le dessin ci-contre, on en déduit que :

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



4 Fonctions trigonométriques

4.1 Définitions et propriétés des fonctions sinus et cosinus

Définition 7

1. La fonction **cosinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. La fonction **sinus** est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition 7

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Démonstration.
En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que les réels x et $x+2\pi$ ont le même point image sur le cercle. Par conséquent, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. □

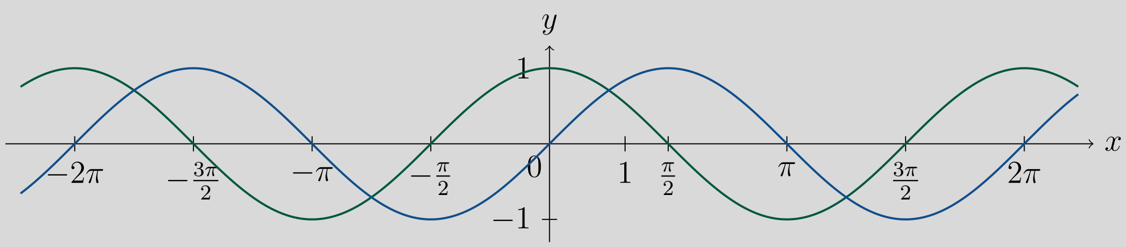
Proposition 8

1. La fonction cosinus est paire.
2. La fonction sinus est impaire.

Démonstration.
En utilisant le cercle trigonométrique, on sait que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et que $\sin(-x) = -\sin(x)$. Cela traduit exactement le fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire. □

Proposition 9

Les courbes des fonctions cosinus et sinus sont représentées ci-dessous.



1. Les fonctions cosinus et sinus étant 2π-périodiques, leur courbe représentative sont invariantes par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction cosinus étant paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. La fonction sinus étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 8

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont appelées des **sinusoïdes**.

Remarque.
Pour connaître les courbes des fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de les connaître sur $[0\,;\pi]$. On obtient ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ par le procédé suivant :

- On trace les courbes sur $[-\pi\,;\pi]$ en utilisant les symétries dues au fait que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.
- On trace ensuite les courbes sur $\mathbb{R}$ en utilisant la périodicité des fonctions cosinus et sinus.

On restreint ainsi l'étude qui suit à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Proposition 10

Les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ sont :

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0

Démonstration.
Les variations des fonctions cosinus et sinus se déduisent directement du cercle trigonométrique. □

Proposition 11

Les tableaux de signe des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ sont :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		π
$\sin(x)$	0	$+$	0

Démonstration.
Le signe des fonctions cosinus et sinus se déduit directement du cercle trigonométrique. □

Remarque.
Les changements de variations de la fonction cosinus se produisent au même moment que les changements de signe de la fonction sinus et inversement. Cela s'explique par la propriété suivante :

Proposition 12 – (admise)

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$

4.2 Fonctions trigonométriques de la forme $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto A\sin(\omega t + \varphi)$

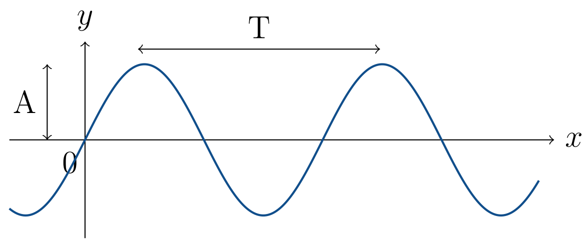
Définition 9

On considère la fonction $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ $\big($ou $t \longmapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ $\big)$, où A, ω et φ sont des réels fixés (avec $\omega > 0$).

- Le réel A est appelé l'amplitude.
- Le réel ω est appelé la pulsation.
- L'expression $\omega t + \varphi$ est appelé phase instantanée.
- Le réel φ est appelé phase à l'origine (correspondant à $t = 0$).

Proposition 13

Les fonctions $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.



Exemple.

La fonction f définie par $f(t) = 3\cos(4t - \frac{\pi}{6})$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Proposition 14 – Formules d'addition

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Proposition 15 – Formules de duplication

Soit a un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration.
Il s'agit d'une application directe de la Proposition 14 (formules d'addition) pour $a = b$. $\square$

Méthode – Transformer $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$

- Calculer $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ (de manière similaire au calcul de la norme d'un vecteur).
- Factoriser l'expression par A.
- Faire apparaître $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ puis utiliser la formule du cosinus d'une somme.

Exemple.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t)$.
Déterminer deux réels A et φ tels que $f(t) = A\cos(3t + \varphi)$.

Solution :
On calcule A :

$$A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3t)\right) \\
&= 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(3t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(3t)\right) \\
&= 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $A = 2$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.