Chapitre 8
Composées de fonctions

Table des matières

1 Définition de la composée de deux fonctions

Définition 1

Soient f et g deux fonctions. La composée de f et de g, notée $f \circ g$ est la fonction définie par :

$$\text{Pour tout } x, \ \ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Pour appliquer la fonction $f \circ g$ à un réel a, on applique dabord g à x puis f à $g(x)$. On peut représenter la situation par le schéma suivant :

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

Exemple.
Soient f et g définie par $f(x) = 2x^2+3$ et $g(x) = 5x+1$. Calculer et simplifier $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Solution :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(5x+1) \\ &= 2(5x+1)^2 + 3 \\ &= 2\Big(25x^2 + 10x + 1\Big) + 3 \\ &= 50x^2 + 10x + 5 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x^2+3) \\ &= 5(2x^2+3) + 1 \\ &= 10x^2 + 16 \end{aligned}$$

Remarque.
L'exemple précédent montre qu'en général, $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas égales. Il faut donc bien faire attention à l'ordre dans lequel on compose les fonctions.

2 Dérivée d'une fonction composée d'une fonction dérivable et d'une fonction affine

Proposition 1

Soit f une fonction dérivable et soient a et b deux réels. On considère la fonction u définie sur par $u(x) = f(ax+b)$. Alors u est dérivable et

$$u'(x) = a \times f'(ax+b).$$

$$x \longmapsto ax+b \longmapsto g(ax+b)$$

Exemple.
On considère la fonction u définie par $u(x) = \exp(3x+1)$. Calculer $u'(x)$.

Solution :
En écrivant, $u(x) = f(3x+1)$ avec $f(x) = \exp x$, on voit que $f'(x) = \exp(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= a \times f'(ax+b) \\ &= 3 \times \exp(3x+1) \\ &= 3\exp(3x+1) \end{aligned}$$

Remarque.
On retrouve ainsi la formule connue pour la dérivée d'une fonction exponentielle de la forme $x \longmapsto e^{ax+b}$.

3 Cas général de la composée de deux fonctions

Proposition 2 – composition

Soient f et g deux fonctions dérivables. Alors la fonction $u = f \circ g$ est dérivable et

$$u'(x) = f'(g(x)) \times g'(x).$$

$$x \longmapsto g(x) \longmapsto f(g(x))$$

Exemple.
Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \exp x^2 + 1$ Calculer $u'(x)$.

Solution :
On a $u = f \circ g$ avec $f(x) = \exp x$ et $g(x) = x^2 + 1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(g(x)) \times g'(x) \\ &= \exp(x^2+1) \times 2x \\ &= 2x\exp(x^2+1) \end{aligned}$$

4 Application aux calculs de primitives

Le tableau suivant donne les dérivées de fonctions composées classiques (où u désigne une fonction). Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition **??**.

Fonction	Dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
u^n	$nu^{n-1} \times u'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\cos(u)$	$u' \cos(u)$
$\sin(u)$	$u' \sin(u)$

Remarque.
Il est important de connaître ce tableau. En effet, on ne l'utilisera pas seulement pour calculer des dérivées mais aussi pour calculer des primitives (et donc des intégrales). Connaitre le tableau permettra donc de reconnaitre les différentes formes lorsqu'elles se présentent.

Exemple.
Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}$

Solution :
On pose $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
En posant $u(x) = x^2+1$, on remarque que $f = \dfrac{u'}{u}$.
Ainsi, une primitive de f est :

$$F(x) = \ln(u(x)) = \ln(x^2+1).$$

On en déduit donc un calcul de l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5).$$