Équations différentielles – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Pour chaque question, montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

1. $f(x) = e^{3x}$
   $(E) : y' = 3y$
2. $f(x) = 3e^{5x}$
   $(E) : y' = 5y$
3. $f(x) = 2e^{7x}$
   $(E) : y' - 7y = 0$
4. $f(x) = 7e^{-4x}$
   $(E) : y' = -4y$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Pour chaque question, montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

1. $f(x) = 5e^{3x} - \dfrac{1}{3}$
   $(E) : y' = 3y + 1$
2. $f(x) = 2e^{-3x} + 1$
   $(E) : y' = -3y + 3$
3. $f(x) = 7e^{11x} - 2$
   $(E) : y' - 11y - 22 = 0$
4. $f(x) = 7e^{-x} + 1$
   $(E) : y' - 1 = -y$

Exercice 3 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque question, montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

1. $f(x) = -\dfrac{1}{x+4}$
   $(E) : y' = y^2$
2. $f(x) = \sin(x)$
   $(E) : y'' + y = 0$
3. $f(x) = e^x + e^{-x}$
   $(E) : y'' - y = 0$
4. $f(x) = 3e^x + 4e^{-2x}$
   $(E) : y'' + y' = 2y$

Exercice 4 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

est une solution de l'équation différntielle

$$y' = 1 + y^2.$$

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 5y = 0$
2. $y' + 13y = 0$
3. $y' - 3y = 0$
4. $y' - 5y = 0$
5. $y' = 12y$
6. $y' = -y$
7. $y' + \dfrac{1}{3}y = 0$
8. $7y' - 14y = 0$
9. $3y' = \dfrac{2}{3}y$
10. $7y' = -\dfrac{1}{6}y$

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 5y = 10$
2. $y' + 3y = 33$
3. $y' - 3y = 3$
4. $y' - 5y - 13 = 0$
5. $y' = 12y + 1$
6. $y' = -y + 1$

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $5y' + 5y = 10$
2. $10y' + 3y = 30$
3. $2y' - 3y = 1$
4. $2y' - 5y - 1 = 0$
5. $\frac{1}{3}y' = 12y - 7$
6. $4y' = -y + \frac{1}{3}$

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

On considère l'équation différentielle

$$y' + 5y = 7$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 4$.

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

On considère l'équation différentielle

$$y' - 4y = 2$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 4$.

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

On considère l'équation différentielle

$$-3y' = y - 4$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 7$.

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \cos(t) + 2\sin(t).$$

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? : « La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. »

Exercice 12 ⋆ [Calculer, Modéliser]

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + 100y = 8.$$

Déterminer la solution v définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

2. La fonction v déterminée à la question précédente modélise la vitesse (exprimée en m.s^{-1}) de chute d'une bille dans un liquide visqueux en fonction du temps t écoulé depuis le début de la chute (exprimé en s).

Déterminer la vitesse, arrondie à $0,001$ m.s^{-1}, de la bille après $0,01$ seconde de chute.

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Une entreprise vient d'installer un distributeur à café dans la salle de repos de ses salariés. Tous les cafés délivrés par ce distributeur ont une température initiale de 80 °C.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température des cafés servis.

On note $\theta(t)$ la température d'un café en degré Celsius, à l'instant t exprimé en minute.
On admet que la fonction θ, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation différentielle :

$$\theta'(t) + 0{,}2\,\theta(t) = 4.$$

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle.
2. Montrer que, pour tout réel t positif : $\theta(t) = 60\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 20$.
3. Un salarié se sert un café et attend 4 minutes avant de le boire.
   (a) Quelle est alors la température de son café ? On arrondit le résultat à l'unité.
   (b) Déterminer la valeur exacte de la durée d'attente nécessaire pour que la température du café atteigne 40 °C, puis en donner une valeur approchée arrondie à la minute.

Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

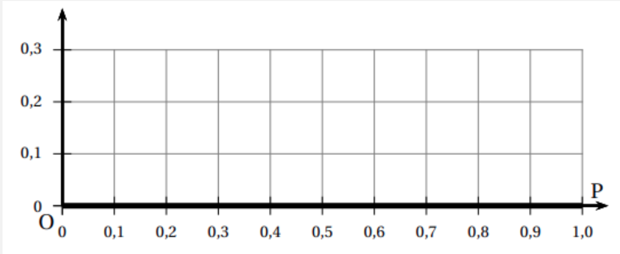
Un réservoir contient 1000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire au taux de sel (en grammes par litre), qui doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.
On modélise la situation en notant s la salinité exprimée en grammes par litre et t le temps écoulé en minutes depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de s est représentée par l'équation différentielle

$$\text{(E)}: \quad y' + 0,01y = 0,39.$$

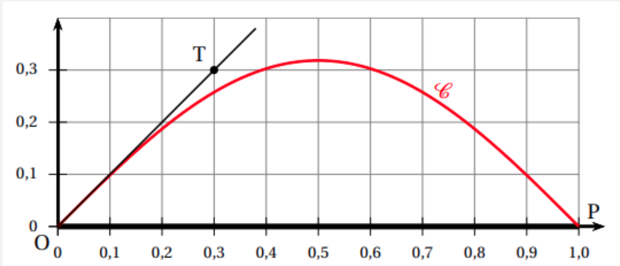
1. Résoudre l'équation (E).
   On admet pour la suite qu'en considérant les conditions initiales, la fonction s est définie par
   $$s(t) = 39 - 38,88\mathrm{e}^{-0,01t}.$$
2. (a) Quelle est la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident c'est-à-dire à $t = 0$?
   (b) Justifier que la fonction s est strictement croissante.
   (c) Déterminer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} près.
   (d) Que devient la salinité de l'eau du réservoir si on n'intervient jamais ?
3. La salinité doit rester inférieure à 3,9 g.L^{-1}.
   De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ?
   Justifier la réponse.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

On considère un conducteur électrique représenté par une tige métallique rectiligne fixée en ses deux extrémités.
Dans le repère orthonormé ci-dessous, d'unité graphique un centimètre, la tige métallique est modélisée par le segment [OP], où P désigne le point de coordonnées (1 ; 0).



En raison d'une augmentation de la température, cette tige métallique se déforme en se dilatant.
La tige déformée est schématisée ci-dessous par la courbe $\mathcal{C}$ passant par les points O et P.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point O passe par le point T de coordonnées (0,3 ; 0,3).



On admet que la courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f, solution de l'équation différentielle (E), dans laquelle y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [0 ; 1].

$$(E): \qquad y'' + \pi^2 y = 0.$$

1. Vérfier que la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi x)$ est bien soltion de (E). On admet pour la question suivante que f est bien la courbe $\mathcal{C}$ tracée ci-dessus.
2. On considère que la tige métallique subit une détérioration irréversible lorsque le maximum de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] est supérieur à $\dfrac{1}{3}$.
   Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Exercice 16 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant.
Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad ;
- un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^6 ohms.

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

La tension u, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction du temps t, en secondes. On admet que $u(0) = 5,6$ et que cette fonction u, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty]$, vérifie pour tout nombre t de l'intervalle $[0 ; +\infty]$ la relation :

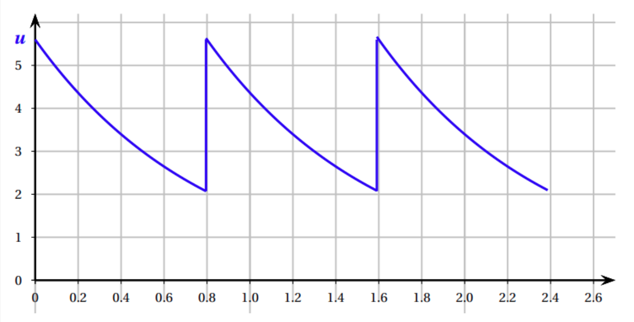
$$u'(t) + \frac{1}{RC} \times u(t) = 0,$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. (a) Vérifier que la fonction u est solution sur l'intervalle $[0 ; +\infty]$ de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
   (c) Montrer que pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty]$, on a : $u(t) = 5,6^{-1,25t}$.
2. (a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty]$.
   (b) Ce résultat était-il prévisible. Justifier la réponse.

Partie B

En réalité, lorsque la tension u aux bornes du condensateur a perdu 63 % de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est à nouveau égale à 5,6 volts.



1. (a) Vérifier que la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty]$ l'équation :
   $$5,6^{-1,25t} = 2,072.$$
   (c) Interpréter le résultat trouvé.
2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute.
   On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 secondes.
   Ce rythme correspond-il à celui d'un adulte au repos et en bonne santé ? Justifier la réponse.

Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
Florin Périer a constaté que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.
Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).
On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1013,25 *hPa au niveau de la mer.*

Partie A : Une règle simplifiée

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée.
   Ainsi $u_0 = 1013,25$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Justifier que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
   (c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 - 0,11n$.
   En déduire l'altitude, exprimée en mètre, à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

Partie B : La formule barométrique

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,12y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hectopascal est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1013,25$.

1. (a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
   (b) Démontrer que la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1013,25$ est la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1013{,}25^{-0{,}12x}$$

2. En utilisant la fonction f :
   (a) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.
   (b) Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.
3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n. Justifier qu'avec ce modèle, la suite (v_n) est géométrique.

Partie C : La formule du nivellement barométrique

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes. Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui à l'altitude x **en kilomètre** associe la pression atmosphérique en hPa :

$$p(x) = 1013,25\left(1 - \frac{6,5x}{288,15}\right)^{5.255}$$

1. Calculer la pression atmosphérique (en hPa, arrondie à l'unité) au sommet de l'Everest dont l'altitude est 8848 mètres.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant en utilisant la fonction p, de façon à ce qu'il affiche en sortie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa.

Variables
A un nombre réel
P un nombre réel
Début
A prend la valeur 0
P prend la valeur 1013.25
Tant que …**faire**
    A prend la valeur $A + 0,1$
    P prend la valeur …
Fin tant que
Afficher …
Fin

Exercice 18 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 20 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).
On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a\Big(\theta(t) - 20\Big) \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) s'écrit également : $\theta' - a\theta = -20a$.

   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 1 °C.

2. Montrer que pour t positif : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.
3. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Exercice 19 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Partie A

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$y' + 0,1y = 3$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle notée (F) :

$$z' + 0,1z = 0$$

   où z désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $y(t) = z(t) + 30$, où la fonction z est solution de l'équation différentielle (F).
   (a) Démontrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E).
   (b) Parmi les fonctions précédentes, déterminer celle vérifiant $y(0) = 20$.

Partie B

La température en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures. La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t}.$$

1. Déterminer la température du lubrifiant :
   (a) À l'arrêt.
   (b) Au bout de vingt quatre heures.
2. On s'intéresse au comportement de la fonction f en $+\infty$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
   (b) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
   (c) Donner une signification concrète de ce résultat pour le lubrifiant.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Construire la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère orthogonal $[0\ ;\ +\infty[$ de l'annexe qu'on rendra avec la copie.
   (c) À quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28 °C ? Donner une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.
   (d) Calculer la température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement.