Lycée Lucie Aubrac - TSTI2D

Chapitre 7
Équations différentielles

Table des matières

1 Définitions et généralités

Définition 1

- On appelle **équation différentielle** une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle apparaît une relation entre la fonction et ses dérivées successives.
- Une fonction qui vérifie l'équation différentielle est une **solution** de l'équation différentielle.
- **Résoudre** une équation différentielle consiste à déterminer l'esemble des fonctions qui sont solutions de l'équation différentielle.

Remarque.

- En général, la fonction inconnue est notée y.
  Ainsi, l'équation différentielle $f' = f$ peut s'écrire aussi $y' = y$.
- Bien souvent, il n'y a pas unicité des solutions d'une équation différentielle.

Méthode – Montrer qu'une fonction est solution d'une équa. diff.

- On calcule f' (éventuellement f'').
- On vérifie que la fonction f vérifie l'égalité correspondant à l'équation.

Exemple.

Montrer que la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y^2 = 0$.

Solution :
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) + (f(x))^2 &= -\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est bien solution de l'équation différentielle.

2 Résolution d'équations de la forme $y' + ay = 0$

Proposition 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) + af(x) = 0 \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ke^{-ax}$.

Remarque.
Une autre formulation de la propriété 1 serait :
Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Démonstration. (partielle)

- $\Longrightarrow$ admise
- $\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ke^{-ax}$.
  Ainsi, $f'(x) = ke^{-ax} \times (-a) = -ake^{-ax}$.
  Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -ake^{-ax} + a \times ke^{-ax} \\ &= -ake^{-ax} + ake^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Exemple.

1. Résoudre l'équation (E) : $y' + 4y = 0$.
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 2$.

Solution :

1. Les solutions de (E) sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-4x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2.

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\iff ke^{-4\times 0} = 2 \\ &\iff k = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de (E) vérifiant $f(0) = 2$ est la fonction f définie par $f(x) = 2e^{-4x}$.

3 Résolution d'équations de la forme $y' + ay = b$

Proposition 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E) : $y' + ay = b$. On suppose qu'il existe une solution f_0 de l'équation (E). Alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + ke^{-ax}.$$

Démonstration.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit f_0 une solution de (E) (cela signifie que $f_0' + af_0 = b$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
f \text{ est une solution de (E)} &\iff f' + af = b \\
&\iff f' + af = f_0' + af_0 \\
&\iff f' - f_0' + af - af_0 \\
&\iff (f - f_0)' + a(f - f_0) \\
&\iff (f - f_0) \quad \text{est solution de } y' + ay = 0 \\
&\iff (f - f_0)(x) = ke^{-ax} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}) \\
&\iff f(x) - f_0(x) = ke^{-ax} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}) \\
&\iff f(x) = f_0(x) + ke^{-ax} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

□

Remarque.
Une conséquence de la propriété 2 est qu'il suffit de connaître une solution de l'équation $y'+ay = b$ pour toutes les connaitres. L'ensemble des solutions est alors obtenu en ajoutant à cette première solution les solutions de l'équation $y' + ay = 0$.

Méthode – Résoudre l'équation $y' + ay = b$

- Déterminer une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda$ (constante).
- En déduire l'ensemble des solutions :

$$f(x) = \lambda + ke^{-ax} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}).$$

Exemple.
Résoudre l'équation $y' + 3y = 1$.

Solution :

- On cherche une solution de la forme $f(x) = \lambda$ (constante).
  On a alors $f'(x) = 0$.
  Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f' + 3f = 1 &\iff 0 + 3\lambda = 1 \\
&\iff \lambda = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- L'ensemble des solutions de $y' + 3y = 1$ sont les fonctions de la forme

$$f(x) = \frac{1}{3} + ke^{-3x} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R}).$$