Intégration – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer, Représenter]

En traçant la courbe représentative des fonctions considérées, déterminer graphiquement les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^5 4\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-2}^2 1\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_2^4 -3\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[2\,;5]$.

Exercice 3 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Calculer les intégrales suivantes en fonction de a et b.

1. $$\int_a^b 3\,\mathrm{d}x$$
2. $$\int_a^b 2x\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
6. $f(x) = \exp(x)$
7. $f(x) = \sin(x)$

Exercice 5 ⋆ [Calculer]

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = -7x + 5$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 5$
3. $f(x) = x^3 - x^2$
4. $f(x) = 5x^2 + x - 2$
5. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 11$
6. $f(x) = 10x^5 - 3x^3 + 33x^2 - 1$
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{5}$

Exercice 6 ⋆ [Calculer]

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 7\cos(x) + 5$
2. $f(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2}$
3. $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$
4. $f(x) = x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9$
5. $f(x) = 37x^2 - \dfrac{1}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - 3\exp(x)$

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 5e^{5x}$
2. $f(x) = -3e^{3x}$
3. $f(x) = e^{6x}$
4. $f(x) = e^{-7x}$
5. $f(x) = 5e^{\frac{x}{2}}$

Exercice 8 ⋆⋆⋆ [Représenter, Communiquer]

Que peut-on dire de la valeur moyenne d'une fonction impaire sur un intervalle de la forme $[-a\,;a]$ (où a est un nombre réel strictement positif) ?

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^3 3x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^2 e^x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^4 7x + 8\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 x^2 - 5x + 1\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{3} + x^3\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - \sin(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^3 e^{5x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer les intégrales suivantes.

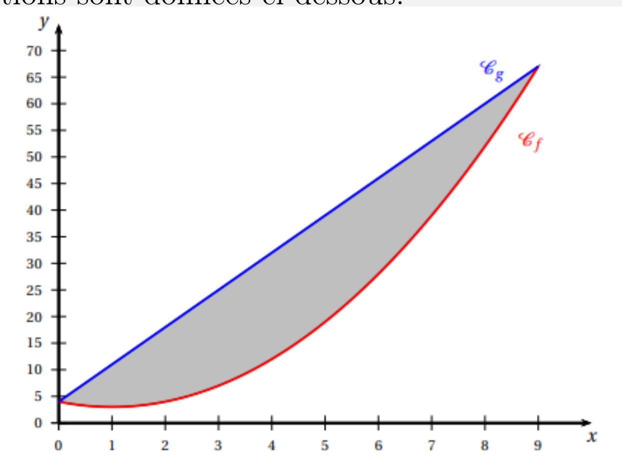
1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{7} + \frac{7}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^3 x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} 3e^{-7x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-4x}}{2}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^4 2e^{-5x-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 12 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\,;\,9]$ respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = 7x + 4$$

Les représentations graphiques des deux fonctions sont données ci-dessous.



Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 6\ln x - 3x + 4.$$

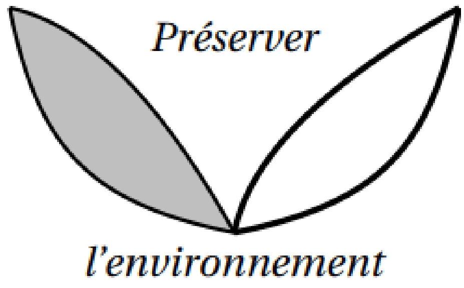
Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$H(x) = 6x\ln x - \frac{3}{2}x^2 - 2x.$$

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de
$$I = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.
4. (a) À l'aide du graphique, donner la valeur de $F(1)$.
   (b) En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

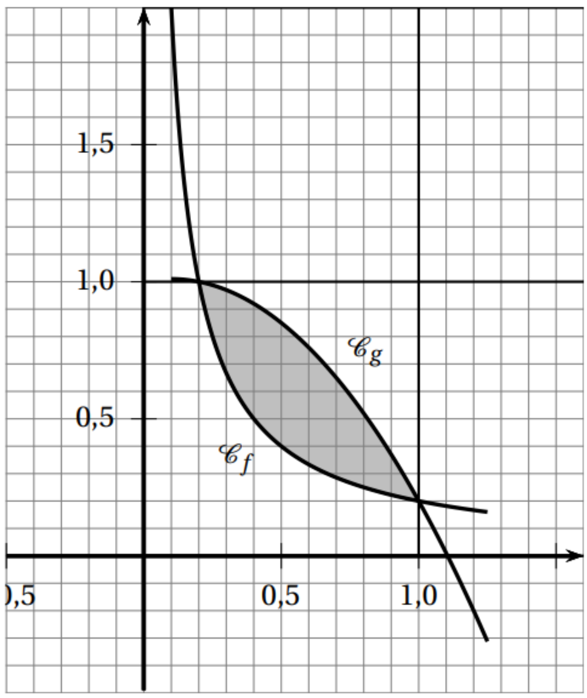
Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer]

Représenter Le conservatoire des espaces naturels d'une région s'occupe d'une zone protégée de 1800 hectares. Depuis plusieurs années, il surveille le domaine d'extension d'une plante invasive. Le logo utilisé par le conservatoire pour la communication est constitué de deux feuilles symétriques l'une de l'autre, dessinées ci-contre.



Soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] par $f(x) = \dfrac{0,2}{x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions tracées dans le repère orthonormé ci-contre. On admet que ces deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points.



La feuille gauche du logo correspond à la partie grisée du plan, délimitée par ces deux courbes.

1. Vérifier par le calcul que $0,2$ est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Déterminer graphiquement la seconde solution de cette équation.
3. (a) Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0,2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-2} près.
4. (a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] par $F(x) = \dfrac{1}{5}\ln(x)$ est une primitive sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] de la fonction f.

   (b) Calculer la valeur exacte de $J = \displaystyle\int_{0,2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. On admet que la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle [0,2 ; 1].

   L'unité choisie sur chacun des axes est de 2,5 cm.

   En déduire, au cm^2 près, une valeur approchée de l'aire totale du logo.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Représenter, Modéliser]

Pour récupérer le plastique se trouvant dans les mers et les océans, un navire expérimental, s'inspirant de la forme des raies mantas, est en projet : le *Manta*. Son rôle serait de collecter les déchets plastiques flottant en surface.

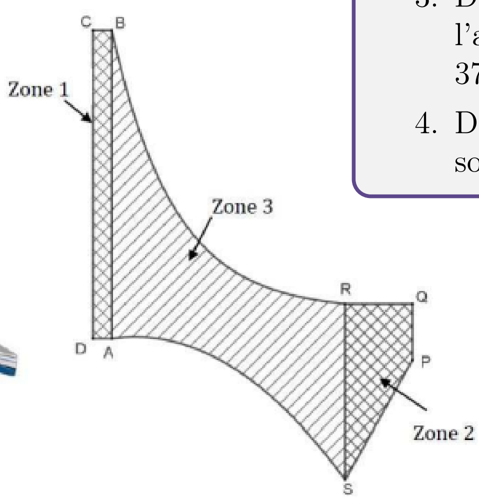
Partie A

On considère qu'un navire comme le *Manta* serait capable de collecter 35 tonnes de déchets plastiques par jour.

1. Chaque année, 8 millions de tonnes de déchets plastiques sont déversés dans les mers et océans. Combien de navires comme le *Manta*, au minimum, faudrait-il pour collecter cette masse de déchets plastiques en un an ?
2. En 2025, il y aura environ 450 millions de tonnes de déchets plastiques dans les mers et océans. Avec une flotte de 700 navires comme le *Manta*, combien d'années faudrait-il, au minimum, pour collecter cette masse de déchets ?

Partie B

Le *Manta* est prévu pour produire lui-même l'énergie nécessaire à son fonctionnement, grâce entre autres, à des panneaux solaires. Nous allons ici déterminer la surface de panneaux solaires sur un flanc du navire.



Le schéma ci-dessous représente la surface de panneaux solaires sur le flanc droit du navire. On a partagé cette surface en 3 zones :

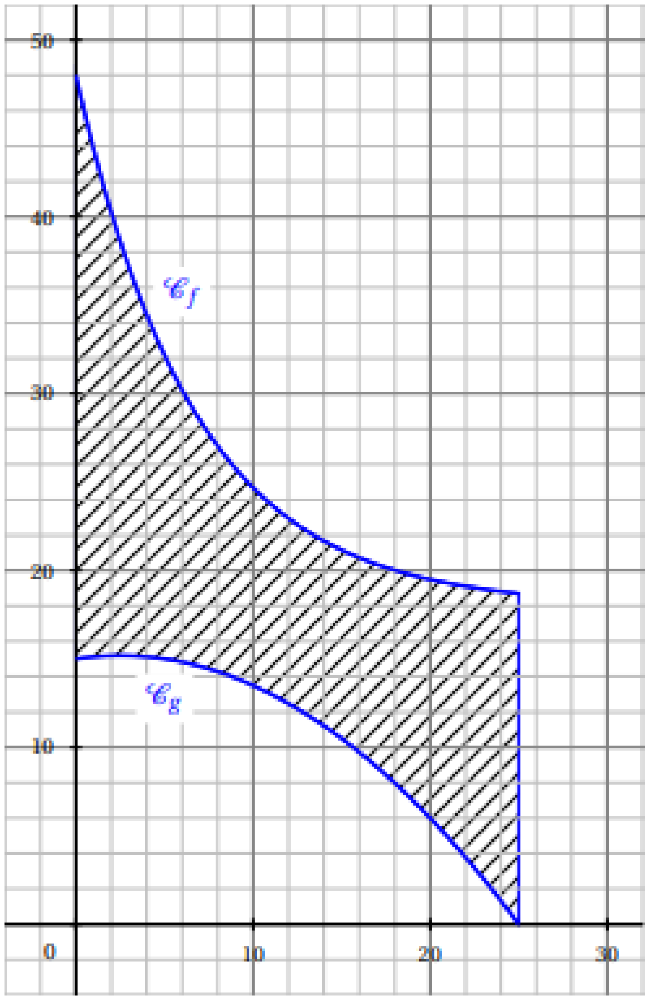
- la zone 1 : un rectangle ABCD, tel que AB = 35 m et BC = 2 m ;
- la zone 2 : un trapèze rectangle PQRS, tel que PQ = 6 m ; RQ = 7, 2 m et RS = 18, 7 m ;
- la zone 3 (voir page suivante), qui a été modélisée, et dont la surface, dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 mètre correspond à la partie du plan limitée par :

- les droites d'équations $x = 0$ et $x = 25$,
- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 25]$ par
$$f(x) = 30e^{-0,15x} + 18,$$
- la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g définie sur $[0\ ;\ 25]$ par
$$g(x) = -0,03x^2 + 0,15x + 15.$$

1. (a) Montrer que la fonction $F(x) = -200^{-0,15x} + 18x$ est une primitive de f sur $[0\ ;\ 25]$.

   (b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^{25} f(x)\underset{\cdot}{x}$, puis en donner une valeur approchée au centième.
2. (a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur $[0\ ;\ 25]$.

   (b) En déduire la valeur exacte de $J = \int_0^{25} g(x)\underset{\cdot}{x}$.
3. Déduire des questions précédentes que l'aire de la zone 3 est d'environ $379,67\ \text{m}^2$.
4. Déterminer la surface totale de panneaux solaires sur le flanc droit du navire.



ZONE 3

Exercice 16 ⋆⋆ [Calculer, Représenter, Modéliser]

Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable.
La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont donnés sur le schéma ci-dessous.
Cette façade avant est symétrique par rapport au segment vertical [OS] et OH $= 30$ m.
L'arc SA de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;60]$, dans un repère orthonormal direct d'origine O du plan, l'unité étant le mètre. Le cahier des charges impose les quatre conditions suivantes :

- OS $= 60$;
- HK > 35 ;
- la fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;60]$;
- OA $\leqslant 60$.

Partie A - Étude d'une fonction numérique

1. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par
$$f(x) = 80 - 20\mathrm{e}^{0{,}025x}$$
vérifie les trois premières conditions du cahier des charges.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par excès du réel a qui vérifie $f(a) = 0$.
Vérifier que la quatrième condition du cahier des charges est remplie.

Partie B - Calcul d'intégrale et application

1. (a) La fonction F est définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par
$$F(x) = 80x - 800\mathrm{e}^{0{,}025x}.$$
Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
(b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale
$$J = \int_0^{55{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$$
(c) Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près de J.
2. On souhaite peindre la surface extérieure de la façade avant.
(a) Déterminer à 10^{-2} près l'aire de cette surface exprimée en m^2.
(b) La peinture utilisée pour peindre la surface extérieure de la façade avant est vendue en bidons de 68 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de $0,2$ mètre carré par litre, combien de bidons sont nécessaires pour peindre la surface extérieure de la façade avant ?