Lycée Lucie Aubrac - TSTI2D

Chapitre 6
Intégration

Table des matières

1 Définitions

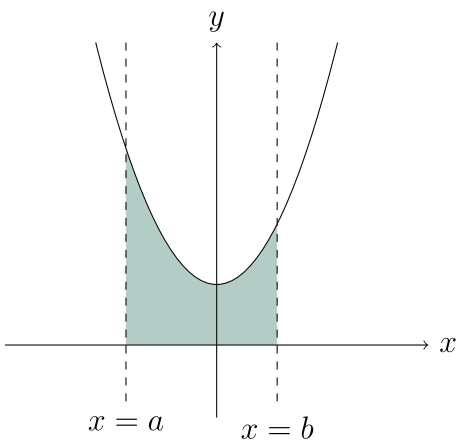
Dans tout ce chapitre, $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan. De plus, a et b sont des réels tels que $a \leqslant b$ et f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$. $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

1.1 Intégrale d'une fonction positive

Définition 1

Si la fonction f est positive sur $[a\,;b]$, on appelle **intégrale de f entre a et b** l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Cette intégrale se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».



Remarque.
Dans une intégrale, la variable est dite muette car elle peut être remplacée par n'importe quelle variable. On a par exemple

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 1

Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

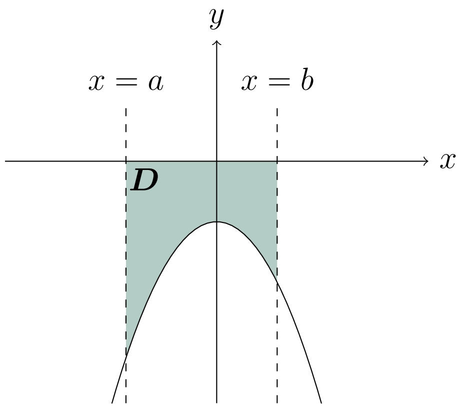
Démonstration.
Cela découle directement du fait que l'intégrale est définie comme une aire (donc est positive). □

1.2 Intégrale d'une fonction négative

Définition 2

Si la fonction f est négative sur $[a\,;b]$, on appelle **intégrale de f entre a et b** l'opposé de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.
Si D désigne le domaine grisé ci-dessous, on a ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{aire}(D).$$



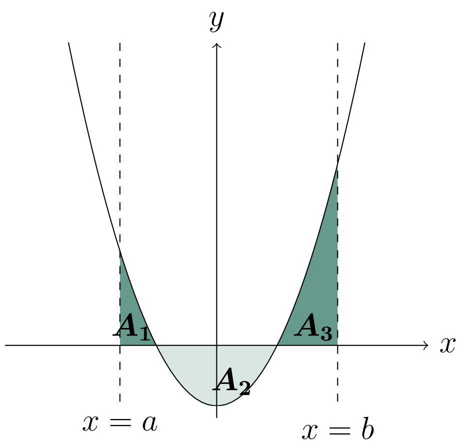
1.3 Cas général

Définition 3

Si le signe de la fonction f varie sur $[a\,;b]$, on appelle **intégrale de f entre a et b** la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

Par exemple, sur le dessin ci-dessous,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3.$$



2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2

Soit f une fonction. Alors,

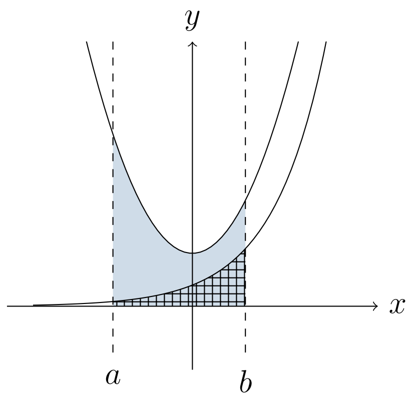
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Démonstration.
Cela découle directement du fait que l'aire d'un segment est nul. □

Proposition 3 – Comparaison

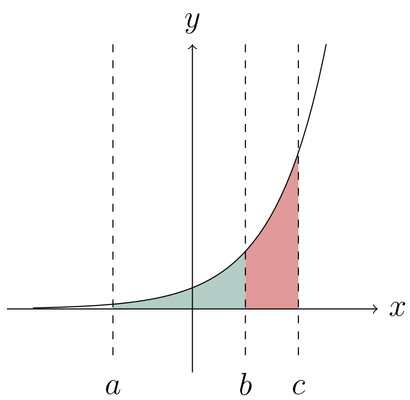
Soient f et g deux fonctions.
Si pour tout x, $f(x) \leqslant g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$



Proposition 4 – Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.$$



Proposition 5 – Linéarité

Soient f et g deux fonctions et $k \in \mathbb{R}$. Alors,

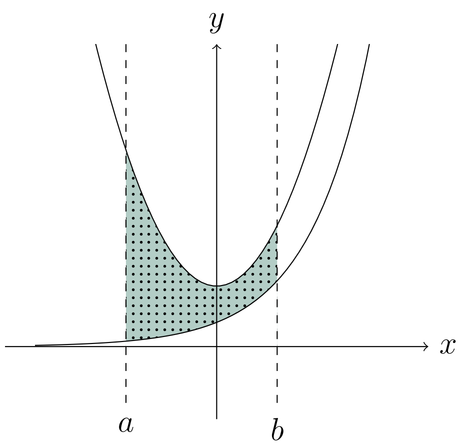
$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{et} \quad \int_a^b k \times f(x)\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 6

Soient f et g deux fonctions telles que pour tout x, $f(x) \leqslant g(x)$. L'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x.$$

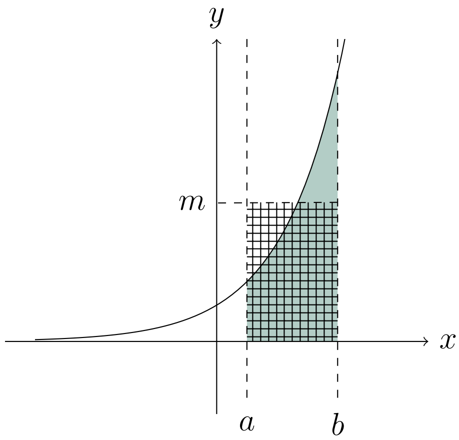


Définition 4 – Valeur moyenne

Soit f définie sur $[a\,;b]$.
La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ est le réel

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque.
La valeur moyenne d'une fonction positive correspond à la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ telle que l'aire de ce rectangle et l'aire sous la courbe de f soient égales. Cela revient à déterminer la fonction constante dont l'intégrale à la même valeur.



3 Calcul d'intégrales

3.1 Primitives d'une fonction

Définition 5 – Primitive

Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. Si une fonction F vérifie $F' = f$, on dit que F est une primitive de f.

Remarque.
Une primitive n'est pas unique. Par exemple, si $f(x) = 2x$ alors les fonctions $F(x) = x^2 + k$ (où k est une constante réelle) sont toutes des primitives de f.

Proposition 7

Le tableau suivant donne les primitives des fonctions usuelles (k désigne une constante réelle).

Fonction	Fonction f	Primitive F
nulle	0	k
constante	a	$ax + k$
affine	x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
carré	x^2	$\frac{1}{3}x^3 + k$
puissance	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
inverse	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
exponentielle	$\exp(x)$	$\exp(x) + k$
cosinus	$\cos(x)$	$\sin(x) + k$
sinus	$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$

3.2 Lien entre primitives et intégrales

Proposition 8 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarque.

$F(b) - F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Avec cette notation, on a donc :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Méthode – Calculer une intégrale

- Calculer une primitive de la fonction.
- Utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

Exemple.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Solution :

- On calcule une primitive : $F(x) = x^3 + 2x$.
- Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[x^3 + 2x\Big]_{-1}^{2} = \Big(2^3 + 2 \times 2\Big) - \Big((-1)^3 + 2 \times (-1)\Big) = 15.$$