



Chapitre 5

Limites de fonctions

Table des matières

1	Limites de sommes, de produits et de quotients de fonctions	2
2	Limites de fonctions polynômes	3
3	Limites de fonctions exponentielles	3

1 Limites de sommes, de produits et de quotients de fonctions

Lorsque l'on connaît les limites de deux fonctions f et g , on peut parfois en déduire la limite de $f + g$, de $f \times g$ et de $\frac{f}{g}$. On utilise les tableaux suivant :

Proposition 1

Soient f et g deux fonctions et l et l' deux nombres réels.

Limite de f	Limite de g	Limite de $f + g$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	FI*
$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \times g$
l	l'	$l \times l'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	FI

Limite de f	Limite de g	Limite de $\frac{f}{g}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$\pm\infty$	0
0	$l \neq 0$	0
$\pm\infty$	$l \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI
0	0	FI

*FI signifie « Forme Indéterminée » : les règles de sommes, de produits et de quotients ne permettent pas de conclure. Il faut donc utiliser d'autres propriétés pour déterminer la limite.

Exemple.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x) = +\infty$.

2 Limites de fonctions polynômes

A priori, si l'on veut calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x$, il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Néanmoins, on peut déterminer la limite en utilisant la propriété suivante :

Proposition 2

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.

Remarque.

Attention, cette règle ne s'applique que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Exemple.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^6 + 7x^4 - 17x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^6 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^6 + 7x^4 - 17x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^6 = -\infty$

3 Limites de fonctions exponentielles

Proposition 3 – (rappel)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

On souhaite déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

A priori, la règle des limites de quotients donne une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Néanmoins, on peut conclure avec la propriété suivante :

Proposition 4 – (admise)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$

Proposition 5 – (admise)

Soit P une fonction polynôme.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)e^{-x} = 0$

Remarque.

De manière imagée :

« L'exponentielle l'emporte sur x et sur n'importe quelle puissance de x ».