Fonctions logarithmes – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Simplifier les expressions suivantes afin d'obtenir un résultat de la forme $\ln(a)$ où a est une expression dépendant de x.

1. $f_1(x) = \ln(x) + \ln(5)$
2. $f_2(x) = \ln(3x) + \ln(x)$
3. $f_3(x) = \ln(x) - \ln(4)$
4. $f_4(x) = 2\ln(x) + \ln(3)$
5. $f_5(x) = 3\ln(2x) - \ln(3x)$

Exercice 2 ⋆⋆ [Calculer]

Montrer que :

$$\ln(2) + \ln(4) + \ln(8) = 6\ln(2).$$

Exercice 3 ⋆⋆ [Calculer]

Montrer que :

$$\ln(40) - 3\ln(2) = \ln(5).$$

Exercice 4 ⋆⋆ [Calculer]

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Exercice 5 ⋆ [Calculer]

Sachant que $\ln(2) \simeq 0{,}69$ et $\ln(5) \simeq 1{,}61$, déterminer une valeur approchée à 0,01 près des nombres suivants :

- $a = \ln((2^4)^3)$
- $b = \ln(5^2 \times 2^5)$

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln(x)$.

1. $f_1(x) = \ln(5x)$
2. $f_2(x) = \ln(8x)$
3. $f_3(x) = \ln\left(\frac{8}{x}\right)$
4. $f_4(x) = \ln(x^3)$
5. $f_5(x) = \ln\left(\frac{3x^2}{7}\right)$

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies pour tout $x > 0$?

1. $\ln(3x) = \ln(x) + \ln(3)$
2. $\ln(5x^2) = 5\ln(x^2)$
3. $\ln(x+3) = \ln(3) \times \ln(x)$
4. $\ln\left(\frac{6}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{6}\right) = 0$
5. $\ln(x)^2 = \ln(x^2)$

Exercice 8 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes.

1. $e^{5x+4} = 1$
2. $e^{3x-1} = 7$
3. $3e^{x+1} = 4$
4. $2e^{x-1} = 1$
5. $e^{4x+1} = 4e^x$
6. $3e^{2x-1} = 4e^{-x}$

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(2x+1) = 6$
2. $\ln(3x-1) = 1$
3. $\ln(3x) = 8$
4. $\ln(2x-4) = 2 + \ln(x)$
5. $\ln(5x-7) = \ln(3x) + \ln(7)$
6. $3\ln(11x-5) = \ln(x^3)$

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln(x) + x^2$
2. $f_2(x) = 4\ln(x) - x + 8$
3. $f_3(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
4. $f_4(x) = x\ln(x)$
5. $f_5(x) = \ln(x^3)$
6. $f_6(x) = \ln(x^2) + \dfrac{1}{x}$

Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction déterminer l'ensemble de définition puis les variations.

1. $f_1(x) = \ln(x) + x$
2. $f_2(x) = \ln(x) - 5x$
3. $f_3(x) = 2\ln(x) - x^2$
4. $f_4(x) = \ln(x^2)$
5. $f_5(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 12 ⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes :

1. $10^x = 1{,}4$
2. $2^x = 135$
3. $5^x = 423$
4. $3^{2x+1} = 100$

Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Résoudre les équations suivantes :

1. $0{,}5^x = 1000$
2. $\dfrac{1}{3^x} = 7$
3. $5^{-3x+1} = 1$
4. $3^{-x} = -2$

Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer]

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité

Un signal Wi-Fi est émis avec une puissance de 20 décibels-milliwatt (dBm).

L'atténuation de la puissance du signal dépend :

- de la fréquence F du signal, exprimée en gigahertz (GHz),
- de la distance D, en mètre, parcourue par ce signal,
- des matériaux traversés.

Pour une distance D supérieure ou égale à 1 mètre et en l'absence d'obstacle, cette atténuation, exprimée en dBm, est donnée par la formule

$$32,35 + 8,7\ln(F \times D)$$

La fréquence F du signal émis est égale à $2,4$ GHz.

1. Montrer qu'une approximation de l'atténuation de la puissance du signal peut être donnée par $A = 40 + 8,7\ln(D)$.
2. (a) Déterminer A pour une distance D de 10 mètres.
   (b) Pour quelle distance D la valeur A est-elle de 80 dBm ?
3. Une valeur approchée P de la puissance du signal, en décibel-milliwatt, à une distance D de l'émetteur est donnée par $P = 20 - A$.
   Justifier que $P = -20 - 8,7\ln(D)$.

Dans la suite de l'exercice, la puissance du signal, en dBm, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 400]$ par

$$f(x) = -20 - 8,7\ln(x)$$

où x est la distance, en mètre, parcourue par le signal.
Lorsque l'unité utilisée est le dBm, la puissance d'un signal est un nombre négatif.

4. (a) Déterminer la fonction f', dérivée de la fonction f, sur l'intervalle $[1 ; 400]$.
   (b) Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1 ; 400]$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
5. (a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 400]$, $f(2x) = f(x) - 8,7\ln(2)$.
   (b) Lorsque la distance parcourue par le signal est doublée, de combien de décibels-milliwatt la puissance du signal diminue- t-elle ?
6. Le tableau suivant indique la qualité du signal en fonction de sa puissance.

Puissance du signal	Qualité du signal
Supérieure à -50 dBm	Excellente
Entre -60 et -50 dBm	Bonne
Entre -70 et -60 dBm	Moyenne
Inférieure à -70 dBm	Faible

   (a) Quelle est la qualité du signal lorsqu'il a parcouru 10 mètres ?
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = -60$.
   (c) En déduire la distance maximale pour laquelle la qualité de signal est bonne.

Exercice 16 ★★ [Modéliser, Calculer]

Les parties A *et* B *de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

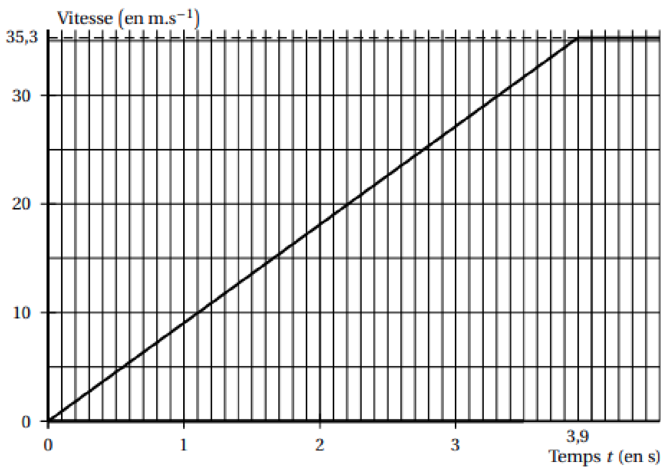
Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,4[$ par :

$$f(x) = 10x + \ln(4 - x) - \ln 4.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.
3. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,4[$.
   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{39 - 10x}{4 - x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4[$.
   (c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.
   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.



Partie B

Un constructeur de voitures électriques affirme que ses modèles peuvent atteindre la vitesse de 100 km.h^{-1} en moins de 3 secondes. Pour vérifier cette affirmation, des journalistes ont testé une de ces voitures en réalisant l'essai suivant :

- dans un premier temps, augmentation de la vitesse de 0 à $35,3$ m.s^{-1} (soit environ 127 km.h^{-1}) en $3,9$ s ;
- dans un deuxième temps, stabilisation de la vitesse à $35,3$ m.s^{-1}.

L'évolution de la vitesse en fonction du temps est représentée par le graphique ci-contre.
Durant la phase d'accélération, la vitesse de la voiture est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A et définie par :

$$f(t) = 10t + \ln(4 - t) - \ln 4 \quad \text{avec } t \in [0\ ;\ 3,9]$$

où t est exprimé en seconde et $f(t)$ est exprimée en m.s^{-1}.

1. (a) Calculer $f(3)$.
   (b) L'affirmation du constructeur est-elle vérifiée ?
2. La distance D, exprimée en mètre, parcourue durant la phase d'accélération est donnée par la formule : $D = \displaystyle\int_0^{3,9} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,3{,}9]$ par :
   $$F(t) = 5t^2 - t + (t - 4)[\ln(4 - t) - \ln 4].$$
   Montrer que la fonction F est une primitive de f.
   (b) Calculer la distance D arrondie au dixième.

Exercice 17 ⋆⋆⋆ [Calculer, Représenter]

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6\ln x + ax + b$$

où a et b sont des constantes réelles,
On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal .
Le point A$(1\,;\,1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-contre, on a tracé $\mathcal{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.

1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 6\ln x - 3x + 4.$$

PARTIE B

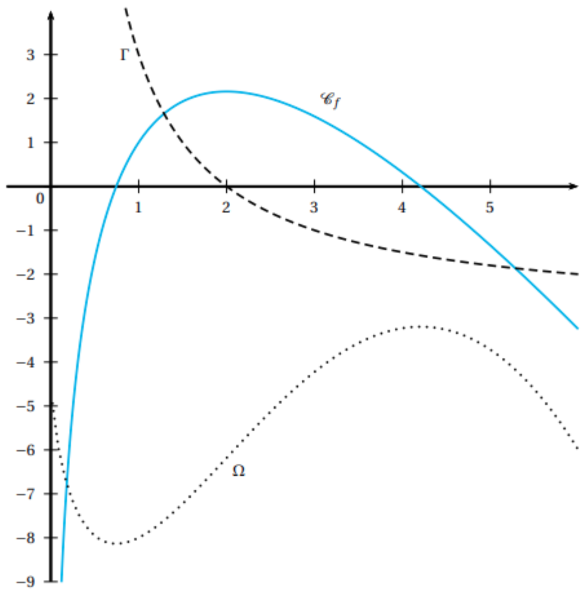
Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathcal{C}_f$ fournie dans la partie A.

(a) Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.

(b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.

(c) étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.

(d) En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.



Exercice 18 ★★ [Calculer, Modéliser]

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.
L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3200$ m.s^{-1}.
La vitesse finale de la fusée vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de 8000 m.s^{-1} pour permettre la mise en orbite souhaitée.
Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.
On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x + 50)$ tonnes.
Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en m· s^{-1}, est donnée par

$$f(x) = V_e \times [\ln(x + 50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100\,;\,900]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[100\,;\,900]$, $f(x) = 3200 \times \ln(0,02x + 1)$.
   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.
2. (a) Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée ?
   (b) Avec 400 tonnes de propergol au décollage la mise en orbite sera-t-elle possible ?
   (c) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
1. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Exercice 19 ★★★ [Modéliser, Calculer]

Pour mesurer l'acidité d'une solution chimique, on utilise le logarithme en base 10 noté log. Plus précisément, on a la formule :

$$pH = -\log(C),$$

où C désigne la concentration en ions hydrogènes de la solution en mol/L.

1. Quel est le pH d'une solution concentrée à 10^{-5} mol/L ?
2. On dit qu'une solution est neutre si son pH est compris entre 6,5 et 7,5. Donner un encadrement de la concentration en ions d'hydrogène d'une solution neutre.
3. Si le pH baisse de 1,079, par combien la concentration en ions hydrogène a été multipliée ?

Exercice 20 ★★★ [Modéliser, Calculer]

On mesure l'intensité I acoustique d'un son en $W.m^{-2}$. En notant N le niveau de ce son en deciBell (dB), on a la correspondance suivante

$$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où I_0 est l'intensité acoustique de référence (seuil de l'audibilité à 1000 Hz), soit $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$.

1. Si le niveau d'un son augmente de 3 dB, que peut-on dire de l'intensité acoustique ?
2. Si l'intensité acoustique est multipliée par 10, que peut-on dire du niveau sonore en dB ?