# Chapitre 4
# Fonctions logarithmes

## Table des matières

# 1 Fonction logarithme népérien

## 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1**

On considère un nombre réel $b > 0$.

- L'unique solution de l'équation $e^x = b$, d'inconnue $x$, est appelée le **logarithme népérien** de $b$ et est notée $\ln(b)$. On a alors $x = \ln(b)$.
- La **fonction logarithme népérien** est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

**Remarque.**
La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

**Proposition 1**

- $e^x = b \iff x = \ln(b)$.
- Pour tout $b > 0$, $e^{\ln(b)} = b$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

## 1.2 Propriétés algébriques

Comme la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle et que la fonction exponentielle transforme une somme en produit, la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme. Autrement dit, on a la propriété ci-dessous.

**Proposition 2**

Pour tout réel $a$ et $b$ strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

**Proposition 3**

Pour tout réel $a$ strictement positif et tout entier naturel $n$ :

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a).$$

*Démonstration.*
$\ln(a^n) = \ln(a \times a \times \ldots \times a) = \ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a) = n \times \ln(a)$. □

De manière plus générale, on a la propriété ci-desous.

**Proposition 4**

Pour tout réel $a$ strictement positif et tout réel $x$ :

$$\ln(a^x) = x \times \ln(a).$$

**Remarque.**
Dans le cas où $x = \frac{1}{2}$, la propriété précéedente donne :

$$\ln(\sqrt{a}) = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

**Proposition 5**

Pour tout réel $a > 0$ et tout réel $x$ :

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

*Démonstration.*
Cela découle directement de la Proposition 4 : il suffit d'appliquer la fonction exponentielle à l'égalité $\ln(a^x) = x \times \ln(a)$ et utiliser le fait que la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction exponentielle. □

**Remarque.**
La Proposition 5 permet d'exprimer n'importe quelle fonction exponentielle de base $a$ à l'aide de la fonction exponentielle de base $e$.

**Proposition 6**

Pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs :

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

*Démonstration.*

- $\ln\left(\dfrac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0.$

  On en déduit que $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0.$

  Finalement, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$

□

**Méthode – Résoudre une équation**

- **Méthode pour résoudre une équation de la forme** $e^{ax+b} = c$ :
  Appliquer la fonction ln.
- **Méthode pour résoudre une équation de la forme** $\ln(ax + b) = c$ :
  Appliquer la fonction exp.

**Exemple.**
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{x+3} = 4$
2. $\ln(5x - 2) = 3$

Solution :

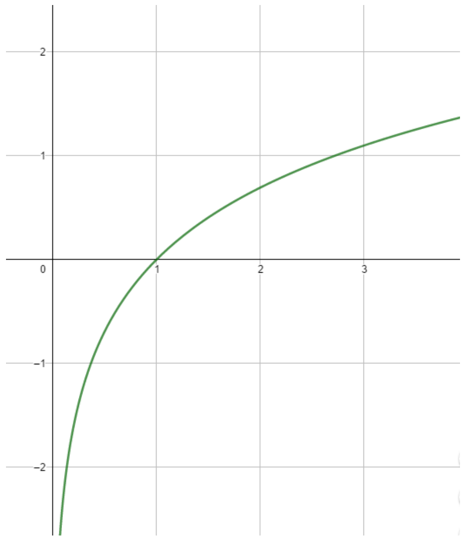
1.

$$\begin{aligned} e^{x+3} = 4 &\iff \ln\left(e^{x+3}\right) = \ln(4) \\ &\iff x + 3 = \ln(4) \\ &\iff x = \ln(4) - 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \ln(5x-2) = 3 &\iff e^{\ln(5x-2)} = e^3 \\ &\iff 5x - 2 = e^3 \\ &\iff 5x = e^3 + 2 \\ &\iff x = \frac{e^3 + 2}{5} \end{aligned}$$

## 1.3 Etude de la fonction logarithme




Courbe de la fonction logarithme népérien

### 1.3.1 Étude du signe

**Proposition 7**

Le tableau de signe de la fonction logarithme népérien est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

### 1.3.2 Étude des variations

**Proposition 8 – (admise)**

Si $f$ est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$ alors $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

**Proposition 9**

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

*Démonstration.*
Ppour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$ donc la fonction est strictement croissante. □

### 1.3.3 Limites

**Proposition 10**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$

# 2 Fonction logarithme de base $a$

## 2.1 Définition et premières propriétés

**Définition 2**

On considère un nombre réel $a>0$ (avec $a\neq1$).
- Pour tout $b>0$, l'unique solution de l'équation $a^x=b$, d'inconnue $x$, est appelée le **logarithme en base** $a$ de $b$ et est notée $\log_a(b)$. On a alors $x=\log_a(b)$.
- La **fonction logarithme de base** $a$ est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\log_a(x)$.

**Remarque.**

- La fonction logarithme népérien est simplement la fonction logarithme de base $e$.
- La fonction logarithme de base 10 est appelée fonction logarithme décimale. On la note souvent simplement **log**.

**Proposition 11**

Pour tout réel $a>0$ (avec $a\neq1$) et tout réel $b>0$ :

$$\log_a(b)=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}.$$

*Démonstration.*

On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & a^x = b \\ \iff & e^{x\ln(a)} = b \\ \iff & \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = \ln(b) \\ \iff & x\ln(a) = \ln(b) \\ \iff & x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Cela prouve bien que $\log_a(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$. □

## 2.2 Propriétés algébriques

**Proposition 12**

Soit $a > 0$ (avec $a \neq 1$). Soit $n$ un entier naturel. Pour tout $x > 0$ et $y > 0$ :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

**Remarque.**

- On pourra retenir que les propriétés algébriques vérifiées par la fonction logarithme népérien sont en fait vérifiées plus généralement par les fonctions logarithmes de base $a$.
- La démonstration de la Proposition 13 repose en fait sur le lien établi entre log et ln dans la Proposition 11.

## 2.3 Variations

**Proposition 13**

Soit $a > 0$ (avec $a \neq 1$).

- Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ ;
- Si $a < 1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ ;

*Démonstration.*
D'après la proposition 11, pour tout $a > 0$ (avec $a \neq 1$) et pour tout $x > 0$ :
$\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{1}{\ln(a)} \times \ln(x)$. Ainsi, en dérivant, on obtient :
$\log_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\ln(a)x}$.
Or, comme $x > 0$, le signe de $\log_a'(x)$ est le même que celui de $\ln(a)$.
Par conséquent, si $a > 1$, la dérivée est strictement positive et la fonction est donc strictement croissante. Inversement, si $a < 1$, la dérivée est strictement négative et la fonction est donc strictement décroissante. □