# Fonctions exponentielles – Exercices

### Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $3^5 \times 3^7$
2. $(2^5)^2$
3. $4^2 + 4^6$
4. $5^4 \times (2^2)^2$
5. $3 \times 2^2$
6. $\dfrac{5^6}{5^4}$

### Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $2^x \times 2^{3x}$
2. $4\,(2^x)^2$
3. $3^{2x} - 3^x$
4. $(5^x)^2 \times (5^{-x})^3$
5. $7^{-x} \times 7^x$
6. $\dfrac{9^x \times (9^x)^2}{9^{3x}}$

### Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction ci-dessous, indiquer si elle est croissante ou décroissante.

1. $f(x) = 3^x$
2. $f(x) = 0{,}9^x$
3. $f(x) = 1{,}9^x$
4. $f(x) = 2 \times 5^x$
5. $f(x) = 0{,}5 \times 1{,}7^x$
6. $f(x) = 2{,}5 \times 0{,}7^x$
7. $f(x) = -3 \times 3^x$
8. $f(x) = -4 \times 0{,}5^x$
9. $f(x) = 2 \times 6^x - 1$

### Exercice 4 ⋆ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Au premier janvier 2006, on achète une voiture 30 000 euros. Sa valeur de revente diminue de 20% par an.

1. Montrer que la valeur de la voiture est donnée par la fonction f définie par $f(t) = 30000 \times 0{,}8^t$, où $t$ désigne le nombre d'années.
2. Déterminer au bout de combien de temps l'automobile vaudra moins de 10000 euros. On déterminera le résultat de manière approchée à l'aide de valeurs obtenu avec la calculatrice.
3. Vérifier le résultat en traçant la courbe de la fonction $f$ à la calculatrice.

### Exercice 5 ⋆ [Calculer, Modéliser, Représenter]

On étudie une culture de bactéries, qui au départ contient 1000 bactéries, et qui double toutes les heures. On désigne par $f$ la fonction qui donne le nombre de bactéries en fonction du temps $t$ exprimé en heures.

1. Combien y a -t-il de bactéries au bout d'une heure ? en déduire $f(1)$.
2. Montrer que l'expression de $f(t)$ est $f(t) = 2^t$, où $t$ désigne le nombre d'heures.
3. Déterminer le nombre de bactéries au bout de 2 heures et 15 minutes.
4. Déterminer à quel moment il y aura 14 000 bactéries. On déterminera le résultat de manière approchée à l'aide de valeurs obtenu avec la calculatrice.
5. Vérifier le résultat en traçant la courbe de la fonction $f$ à la calculatrice.

## Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

On décide de modéliser l'évolution du prix de cet article au cours du temps, à partir du 1er janvier 2000, par la fonction $P$ définie par $P(t) = 72 \times 1,087^t$ où :

- $t$ est le temps écoulé depuis le 1er janvier 2000, l'unité de temps étant l'année.
- $P(t)$ est une estimation du prix de l'article lorsqu'il s'est écoulé un temps $t$ après le premier janvier 2000. Par exemple $P(2{,}25)$ est une estimation, avec ce modèle, du prix de l'article le 1er avril 2002.

En utilisant ce modèle, estimer le prix, arrondi à l'unité, de l'article le 1er janvier 2011 puis le 1er juillet 2011.

## Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 17% en 7 ans. Quel est le taux d'évolution moyen annuel ?

## Exercice 8 ⋆⋆ [Calculer]

Un producteur a successivement augmenté ses prix de 2%, de 4% puis de 6%. Quel est le taux d'évolution moyen de ces trois évolutions ?

## Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

La population d'une commune a doublé entre 1970 et 2000. Quel est le taux d'accroissement annuel moyen de la population ?

## Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017.Déterminer le taux d'évolution annuel moyen correspondant à cette augmentation.

## Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

La zone euro a connu une inflation de 9,1% entre le 1er septembre 2021 et le 1er septembre 2022. Déterminer quel est le taux d'inflation mensuel moyen au cours de cette période.

## Exercice 12 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $e^5 \times e^7$
2. $(e^5)^2$
3. $e^2 + e^1$
4. $e^2 \times (e^3)^3$
5. $3e^2$
6. $\dfrac{e^4 \times (e^2)^2}{e^5}$

## Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Simplifier, lorsque cela est possible, les expressions suivantes :

1. $e^x \times e^{2x}$
2. $3\,(e^x)^2$
3. $e^{2x} + e^2$
4. $(e^x)^3 \times (e^{-x})^2$
5. $4e^{-x} \times e^{5x}$
6. $\dfrac{e^x \times (e^{3x})^2}{e^{8x}}$

## Exercice 14 ⋆ [Calculer]

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité et calculer $f'(x)$.

1. $f : x \longmapsto e^x + x^2 - 5$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-1}$
3. $f : x \longmapsto e^{3x+1}$
4. $f : x \longmapsto e^{-2x+5}$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^{-x+1}}$

**Exercice 15 ⋆ [Calculer]**

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{x-4} = e^{3x}$
2. $e^{5x+2} = e$
3. $e^{-3x} = 1$
4. $e^{-3x^2} = \frac{1}{e}$
5. $e^x + 1 = 0$
6. $(x^2 - 2)e^{x-3} = 0$
7. $(e^{-x+1} - 1)(e^{3x} + e) = 0$
8. $-e^{3x} = e^{-3x}$

**Exercice 16 ⋆ [Calculer]**

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x+5} \leqslant e^{2x}$
2. $e^{5x+2} \leqslant 1$
3. $e^{-3x+1} > \frac{1}{e^{-x^2}}$
4. $\frac{3x-1}{e^{2x}} < 0$
5. $e^{-2x+6} \leqslant 0$
6. $e^{x+4} \geqslant \frac{-3}{e^{5x}}$

**Exercice 17 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]**

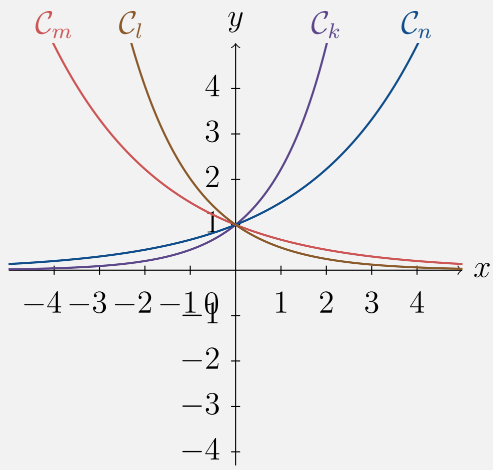
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$. Montrer que $f$ est strictement croissante si, et seulement si, $a > 0$.

**Exercice 18 ⋆⋆ [Représenter]**

On considère quatre fonctions $k$, $l$, $m$ et $n$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = e^{ax} \qquad l(x) = e^{bx}$$
$$m(x) = e^{cx} \qquad n(x) = e^{dx}$$

où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres réels. On donne par ailleurs les courbes représentatives de $k$, $l$, $m$ et $n$ ci-dessous.




Classer par ordre croissant les réels $a$, $b$, $c$ et $d$.

**Exercice 19 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]**

Étudier chacune des fonctions suivantes (signe et variations) puis représenter, à main levée et sans utiliser la calculatrice, sa courbe représentative.

1. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x - 1$
2. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x^2}$
3. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{3x+1}$
4. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1 - 5x)e^x$
5. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (1 + x)e^{-x+2}$
6. $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (e^x)^2 + 5$
7. $f : x \in ]0\,;+\infty[ \longmapsto \frac{e^x}{x}$

## Exercice 20 ⋆ ⋆ ⋆ [Représenter, Calculer]

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 6e^{x} - 8x - 4.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère :

- $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ ;
- $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $y = -8x - 4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$.
2. Étudier le signe $f'$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.
5. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point en commun ? Justifier.

## Exercice 21 ⋆ [Modéliser, Calculer]

Une société de peinture utilise, dans le cadre de son activité, une nacelle élévatrice (dite « nacelle à ciseaux »).
On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) de la nacelle à l'instant $t$ (en seconde) suivant la mise en route.
On suppose que $h$ est la fonction de la variable réelle $t$ définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'expression

$$h(t) = -15\mathrm{e}^{-0,2t} + 18.$$

1. Déterminer la hauteur initiale de la nacelle.
2. Déterminer la limite de la fonction $h$ en $+\infty$. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 22 ⋆ [Modéliser, Calculer]

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée $E$, peut être modélisée en fonction du temps $t$ écoulé (en heure) par la fonction $E$ définie pour $t \in [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$E(t) = 18\left(1 - \mathrm{e}^{-0,45t}\right).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh.
Déterminer l'instant $t_0$, arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

## Exercice 23 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Une entreprise fabrique des pièces en acier, toutes identiques, pour l'industrie aéronautique. Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25°C. Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600°C et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500°C. La température de ces pièces varie en fonction du temps. On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(t) = 1375e^{-0,075t} + 25,$$

où $t$ correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1. Calculer la température des pièces à la sortie du four.

2. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3. Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4. On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.
   (a) Compléter l'algorithme donné ci-dessous pour qu'il renvoie ce temps minimum d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

```
from math import *
def f(t):
    return 1375*exp(-0.075*t)+25

def seuil():
    t=...
    temperature=....
    while temperature >=....:
        t=t+0.1
        temperature=....
    return t
```

   (b) Déterminer ce temps minimum d'attente. On arrondira au dixième.

## Exercice 24 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On modélise la concentration de CO2 dans l'atmosphère, exprimée en ppmv (partie par million en volume), par une fonction f de la variable $t$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 280 + ke^{at}$$

où $k$ et $a$ sont deux constantes réelles, et t représente le temps écoulé depuis le 1er janvier 1958, exprimé en année.

1. Le 1er janvier 1958, la concentration de CO2 dans l'atmosphère valait 315 ppmv. Déterminer la valeur de la constante $k$.
2. Le 1er janvier 2018, la concentration de CO2 dans l'atmosphère valait 411,25 ppmv. Déterminer la valeur exacte de la constante $a$.
3. Dans cette question, on admet que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = 280 + 35e^{0{,}022t}.$$

   La concentration de CO2 mesurée le 1er janvier 1994 était de 357 ppmv. La modélisation choisie semble-t-elle pertinente ?

## Exercice 25 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone ($CO_2$).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de volume 900 000 $dm^3$.
À 20 h, après une journée de travail, le taux volumique de $CO_2$ dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de $CO_2$ présent dans cette pièce à 20 h est de 5 400 $dm^3$.

Pour diminuer ce taux de $CO_2$ durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de $CO_2$, exprimé en $dm^3$, est alors modélisé par une fonction du temps $t$ écoulé après 20 h, exprimé en minutes. $t$ varie ainsi dans l'intervalle $[0\,;690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20 h et 7 h 30.
On admet que cette fonction $V$ est définie sur $[0\,;690]$ par $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 450$.

2. Quel sera, au $dm^3$ près, le volume de $CO_2$ dans cette pièce à 21 h ?
3. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7 h 30 le taux de $CO_2$ dans cette pièce est inférieur à 0,06 %.

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'heure à partir de laquelle le volume de $CO_2$ dans la pièce deviendra inférieur à 900 $dm^3$.

## Exercice 26 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.
Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.
La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction $f$ du temps $t$, exprimé en minutes. On admet que cette fonction $f$ est définie sur $[0\;;\;+\infty[$ par $f(t) = 0,475^{-0{,}12t} + 0,025$.

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\;;\;+\infty[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\;;\;+\infty[$.
3. Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice le temps nécessaire pour obtenir une concentration en octane dans la cuve de 0,25 mole par litre (on demande une valeur approchée à la minute près).
5. Calculer, en justifiant votre réponse, $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
6. Interpréter le résultat dans le contexte.
7. Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.

**Exercice 27 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]**

**Partie A**

On considère la fonction $w$ définie pour tout réel positif $t$ par :

$$w(t) = 4\mathrm{e}^{-200t} + 146.$$

On note $C$ la courbe représentative de la fonction $w$ dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $w(0)$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction $w$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. On note $w'$ la fonction dérivée de la fonction $w$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Pour tout réel positif $t$, calculer $w'(t)$.
   (b) Étudier le signe de $w'$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction $w$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $C$ au point d'abscisse $0$ .

**Partie B**

On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad.s$^{-1}$.
On s'intéresse à une phase particulière appelée phase d'embrayage.
Durant cette phase, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s$^{-1}$, est modélisée par $w$ étudiée dans la partie A.

1. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la limite de $w(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$ ainsi que le sens de variation de la fonction $w$.
2. On considère que la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad.s$^{-1}$, est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieure à $0,01$.
   Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de seconde.

**Exercice 28 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]**

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de $x$centaines de litres est donné par la fonction $R$ définie sur l'intervalle $[2\,;20]$ par :

$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}.$$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (c'est-à-dire un déficit).
3. Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$, d'inconnue $x$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. On note $R'$ la dérivée de la fonction $R$. Montrer que pour tout $x \in [2\,;20]$ :
   $$R'(x) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}.$$
5. En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

**Exercice 29** ⋆⋆⋆ [Calculer]

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3.$$

1. On admet que la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ est 3. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
2. On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel $x$ appartenant à $\mathbb{R}$,
   $$f'(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction $f$.
3. On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$F(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} + 3x.$$
   Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ (on dit que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$).

**Exercice 30** ⋆⋆⋆ [Chercher, Raisonner, Représenter]

Est-il vrai que la courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de toutes ses tangentes ? Justifier.