Lycée Lucie Aubrac - Terminale STI2D

Chapitre 3
Fonctions exponentielles

Table des matières

1 Fonctions exponentielles - Généralités

1.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 1

On considère un nombre réel $a > 0$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ est appelée **fonction exponentiellle de base** a

Remarque.
La fonction exponentielle de base a est un prolongement de la suite géométrique $u_n = a^n$ à tous les nombres réels x.

Proposition 1

Pour tout $a > 0$, pour tous réels x et y et pour tout entier n :

- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^n = a^n x$

Exemple. $3^{1,4} \times 3^{0,6} = 3^{1,4+0,6} = 3^2 = 9$.

1.2 Etude des fonctions exponentielles

Proposition 2

Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$ (avec $a > 0$) alors a fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration. Cela découle directement du fait que $a > 0$. □

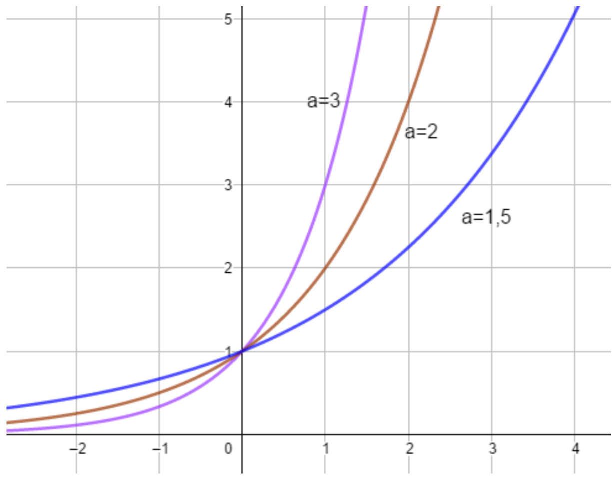
Proposition 3 – (admise)

On considère la fonction f définie par $f(x) = a^x$.
Les variations de f dépendent du signe de a :

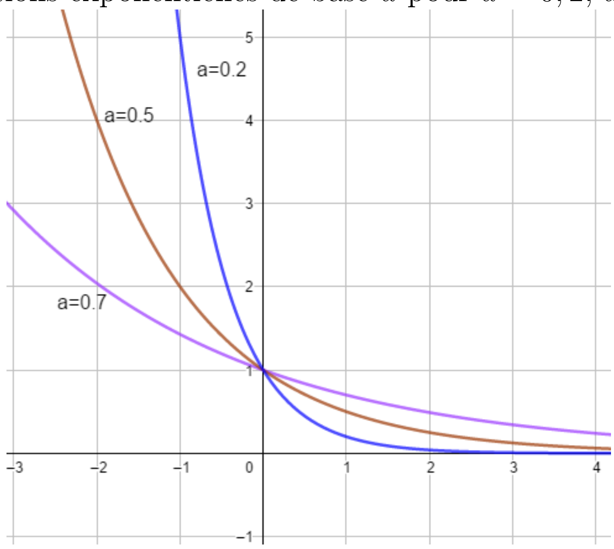
- Si $a > 1$, la fonction est croissante.
- Si $0 < a < 1$, la fonction est décroissante.

Remarque. La dérivée des fonctions exponentielles de base a n'est pas au programme dans le cas général.

Exemples. Courbes des fonctions exponentielles de base a pour $a = 1,5$, $a = 2$ et $a = 3$



Courbes des fonctions exponentielles de base a pour $a = 0,2$, $a = 0,5$ et $a = 0,7$



1.3 Application au calcul du taux moyen

Exemple. Une école de danse a vu son nombre d'adhérents augmenté entre 2017 et 2020. Plus précisément, de 2017 à 2018, le nombre d'adhérents a augmenté de 16%. De 2018 à 2019, il a augmenté de 40%. Enfin, de 20192020, il a augmenté de 5%. De combien de pourcents a-t-il augmenté en moyenne chaque année ? (on parle ici de taux annuel moyen).

Remarque. Attention, il est impossible de calculer simplement la moyenne des pourcentages, de la même manière qu'il n'est pas possible de sommer des taux d'évolutions. Il faut travailler avec les coefficients multiplicateurs !

Méthode – Méthode pour calculer un taux annuel moyen

1. Calculer le coefficient multiplicateur global sur la période considérée.
2. Elever le résultat à la puissance $\dfrac{1}{n}$ pour connaître le coefficient multiplicateur moyen d'une année (n correspond au nombre d'années)

Remarque. La même méthode peut être appliquée pour calculer un taux mensuel moyen (le nombre n correspond alors au nombre de mois).

Solution de l'exemple :
Le coefficient multiplicateur global sur les trois années est de $1,16 \times 1,40 \times 1,05 \simeq 1,705$.
On calcule donc $1,705^{\frac{1}{3}} = 1,195$.
L'augmentation annuelle moyenne est de $19,5\%$.

2 Fonction exponentielle de base e

2.1 Définition et premières propriétés

On souhaite déterminer une fonction vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
On va chercher une telle fonction parmi les fonctions exponentielles de base a.

Si une fonction f vérifie cette propriété, on a nécessairement $f'(0) = f(0)$. Or, pour une fonction exponentielle de base a, $f(0) = a^0 = 1$. On en déduit donc que $f'(0) = 1$.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on observe que $f'(0) = 1$ si $a \simeq 2,71$.

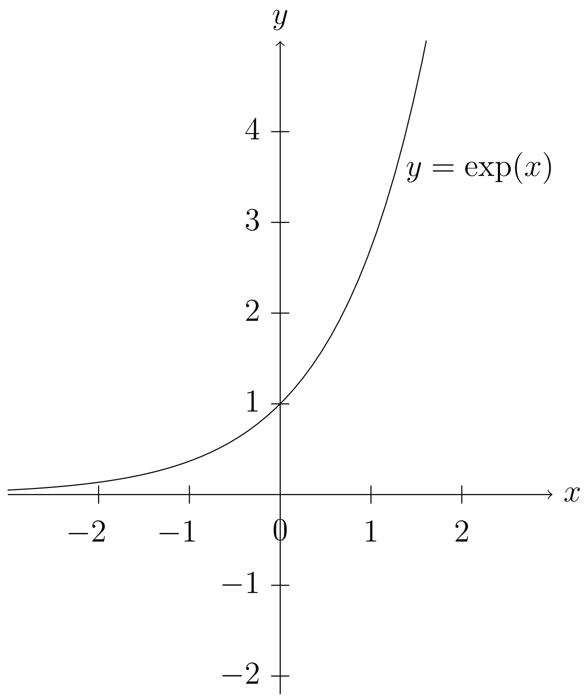
Définition 2

Le nombre d'Euler noté e est défini tel que la courbe de la fonction $f(x) = e^x$ admet, au point d'abscisse 0, un tangente dont le coefficient directeur est 1.

Remarque.
On a $e \simeq 2,718$.

Définition 3

Lorsque l'on parle de « la fonction exponentielle » sans préciser la valeur de a, il s'agit de la fonction exponentielle de base e, c'est-à-dire la fonction f définie par $f(x) = e^x$.



Proposition 4 –

our tous réels x et y et pour tout entier n :
- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^n x$

2.2 Étude du signe et des variations

Proposition 5

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
A fortiori, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

Démonstration. Cela découle directement du fait que cette propriété est vraie pour les fonctions exponentielles de base a. La fonction exponentielle est simplement un cas particulier de ces fonctions pour $a = e$. □

Proposition 6 – (admise)

Si f est la fonction définie par $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$.

Proposition 7

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
On note f la fonction exponentielle. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Or, pour tout x, $f(x) > 0$ donc on en déduit que $f'(x) > 0$, c'est-à-dire que la fonction est strictement croissante. □

2.3 Complément sur la dérivée d'une fonction exponentielle

Proposition 8

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$, alors :

$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemple.
Soit f définie par $f(x) = e^{5x-2}$.
On a : $f'(x) = 5e^{5x-2}$.

2.4 Fonction exponentielle et résolution d'équations et d'inéquations

Pour résoudre une équation ou une inéquation faisant apparaître la fonction exponentielle, on utilise une méthode découlant de la propriété suivante :

Proposition 9

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
- $a \leqslant b \iff exp(a) \leqslant \exp(b)$
- $a \geqslant b \iff exp(a) \geqslant \exp(b)$
- $a = b \iff exp(a) = \exp(b)$

Démonstration. Cela découle du fait que la fonction exponentielle est croissante. Elle conserve donc le sens des inégalités. □

Méthode – Méthode pour résoudre une équation ou une inéquation contenant des exponentielles

- On utilise les propriété algébriques afin de se rammener à des équations du type $e^a = e^b$ ou $e^a \leqslant e^b$.
- On applique ensuite la propriété 2.4.

Exemple.
Résoudre $e^{-2x+1} \leqslant 1$

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{-2x+1} \leqslant 1 &\iff e^{-2x+1} \leqslant e^0 \\ &\iff -2x+1 \leqslant 0 \\ &\iff x \geqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.5 Limites de la fonction exponentielle de base e

Proposition 10

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} = 0$