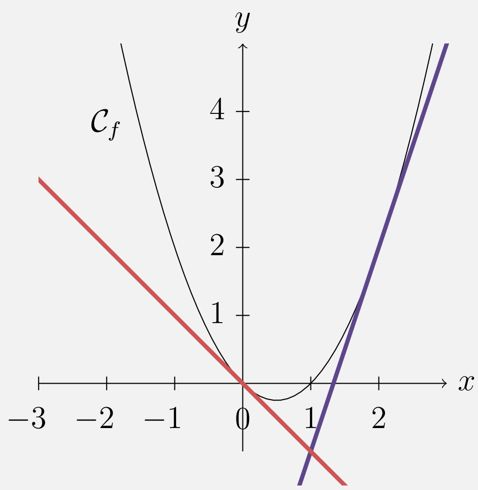
Dérivation – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Représenter]

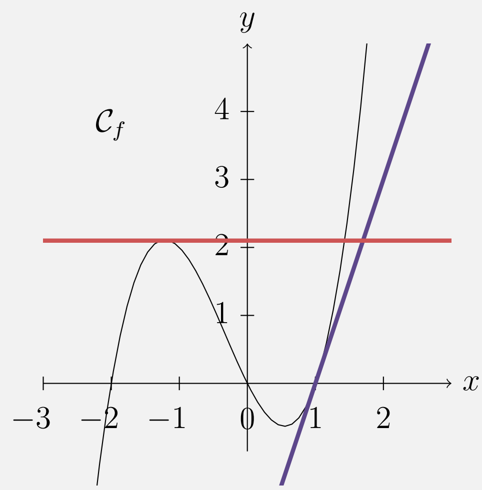
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = 0$ et $a = 2$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 (en rouge) et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 (en vert).



Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$.

Exercice 2 ⋆ [Représenter]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = -1$ et $a = 1$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 (en rouge) et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 (en vert).



Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(1)$.

Exercice 3 ⋆ [Représenter]

Pour chaque fonction, tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice puis déterminer graphiquement l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. $f(x) = -x^3 + 5x + 7$ et $a = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x}{3 + 8x}$ et $a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{3x + 7}$ et $a = 3$
4. $f(x) = \dfrac{2x + 7}{\sqrt{x}}$ et $a = 2$.

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 5 ⋆⋆ [Représenter]

On considère une fonction f définie sur $[-3\,;3]$ et dérivable pour tout réel a de l'intervalle $[-3\,;3$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-1	0,5	2	3
$f(x)$	0	1	0,5	3	-2
$f'(x)$	2	0	-1	-1	0

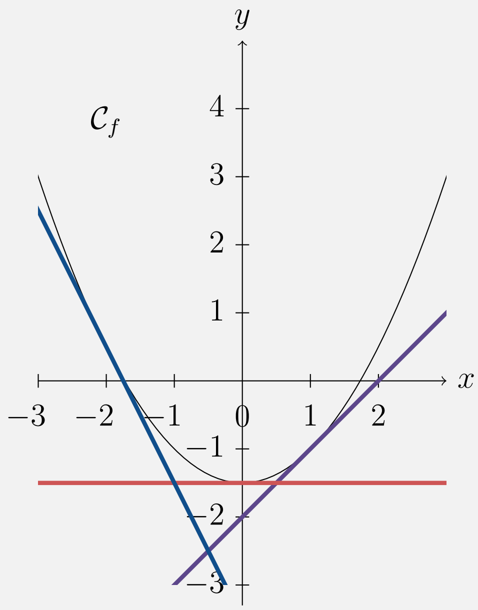
Exercice 6 ⋆ [Représenter, Calculer]

Pour chaque fonction f, justifier qu'elle est dérivable en a et déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$ et $a = 4$
2. $f(x) = x^5$ et $a = -1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 3$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -6$
5. $f(x) = x^3$ et $a = 7$

Exercice 7 ⋆ [Représenter]

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en $a = -1$ et $a = 1$. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Déterminer graphiquement les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -2, 0 et 1.

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité en justifiant puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

1. $f(x) = 5x + 3$
2. $f(x) = -6$
3. $f(x) = x^2 + x$
4. $f(x) = 3x^2 - 5x$
5. $f(x) = -5x^2 + 3x + 5$
6. $f(x) = x^3 - 3x$
7. $f(x) = \dfrac{x^5}{4} + \dfrac{x}{3} + \pi$
8. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^4}{4}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$
10. $f(x) = \dfrac{7}{x}$
11. $f(x) = \dfrac{3x+1}{5}$

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité en justifiant puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

1. $f(x) = x(x-1)$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
4. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) x^2$
5. $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+5}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$
8. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+3}$
9. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$
11. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x-5}$
12. $f(x) = \dfrac{5}{1-x}$

Exercice 10 ⋆ [Représenter]

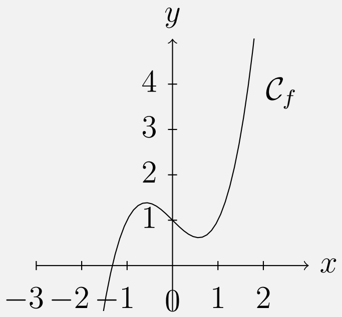
On donne le tableau de signes de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

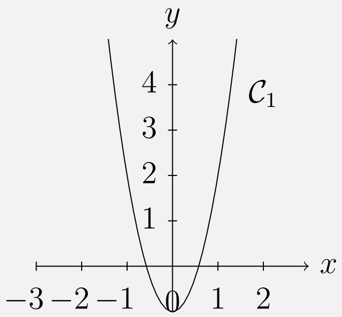
Déterminer les variations de la fonction f.

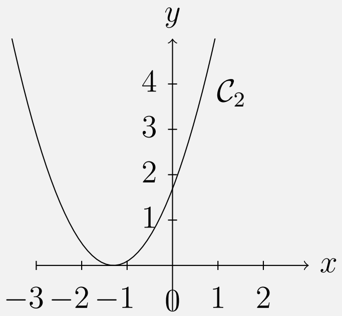
Exercice 11 ⋆ [Représenter]

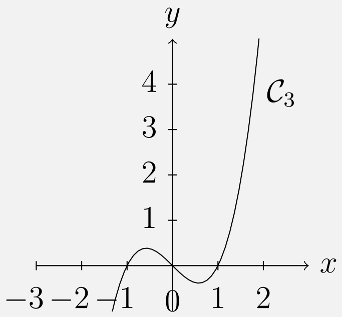
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



Parmi les trois représentations graphiques ci-contre, laquelle est susceptible de représenter la fonction f', fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$?







Exercice 12 ⋆ [Calculer]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.

Exercice 13 ⋆ [Calculer]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - x - 1$.

Exercice 14 ⋆ [Calculer, ´]

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1$.

Exercice 15 ⋆ [Calculer]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 5x^2 - 4$.

Exercice 16 ⋆ [Calculer]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-7}$.

Exercice 17 ⋆ [Calculer, ´]

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 18 ⋆ [Calculer, ´]

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x - 4 + \dfrac{2}{x}$.

Exercice 19 ⋆ [Calculer, ´]

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+12x}{x^2+4}$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 - 4x + 5$.

Exercice 21 ⋆⋆ [Calculer]

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x^2 - 6x + 4$.

1. Dériver f.
2. Montrer que $f'(x) = 2(x-1)(x-2)$.
3. En déduire les variations de f.

Exercice 22 ⋆⋆ [Calculer]

On considère la fonction suivante :
$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

1. Dériver f.
2. Montrer que $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$.
3. En déduire les variations de f.

Exercice 23 ⋆⋆ [Calculer]

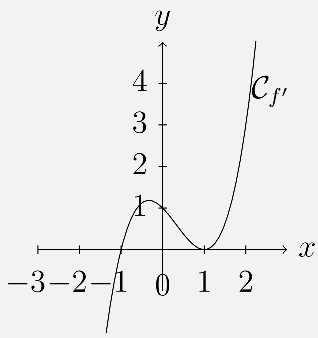
On considère la fonction suivante :
$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto t^3 - 3t^2 - 9t - 1$.

1. Dériver f.
2. Montrer que $f'(t) = 3(t+1)(t-3)$.
3. En déduire les variations de f.

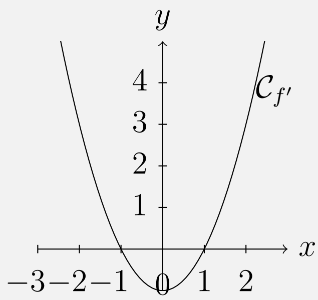
Exercice 24 ⋆ [Représenter]

Chaque courbe est la représentation graphique de la fonction dérivée f'. Dans chaque cas, tracer une courbe susceptible de représenter f.
Remarque : les trois premières fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ alors que la quatrième est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

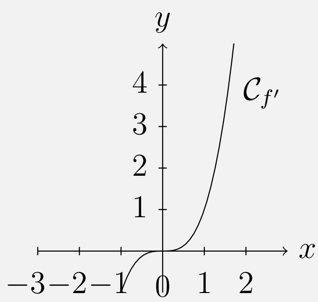
1.



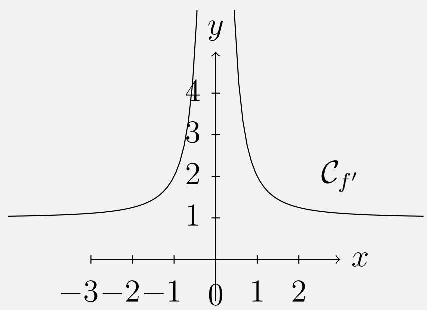
2.



3.



4.



Exercice 25 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

1. Soit f la fonction définie sur l' intervalle $[1\,;\,10]$:

$$f(x) = x^2 - 12x + 96$$

   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$.

   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

2. Le magasin d'informatique se fournit en ordinateurs auprès d'une entreprise locale qui peut fabriquer au maximum 10 ordinateurs par semaine.

   On note x le nombre d'ordinateurs produits en une semaine.

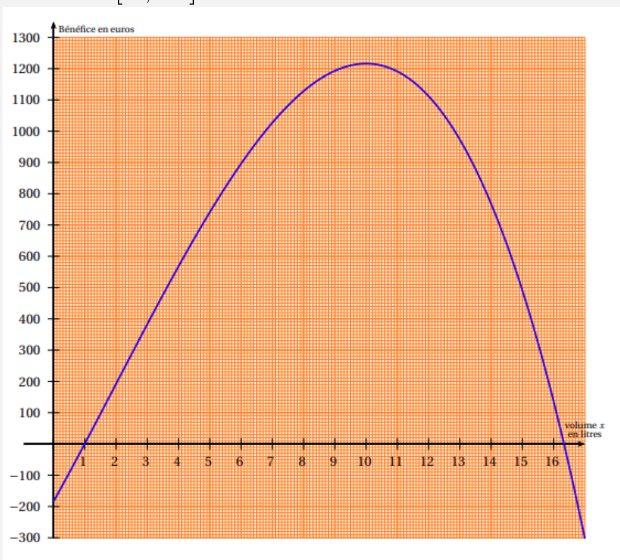
   On admet que, pour tout x entier appartenant à l'intervalle $[1\,;\,10]$, le coût total de fabrication, exprimé en dizaines d'euros, est égal à $f(x)$.

   (a) Déterminer le nombre d'ordinateurs fabriqués par semaine qui permet un coût total de fabrication minimal.

   (b) Donner la valeur de ce coût minimal.

Exercice 26 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Le laboratoire pharmaceutique Clamex fabrique et commercialise un vaccin contre la rougeole. Sa capacité de production, sur une semaine, lui permet de réaliser entre 0 et 17 litres de ce produit.
On note x le volume de production exprimé en litres.
On note $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par le laboratoire pour la vente du volume x de vaccin.
La courbe représentative de la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;17]$ est donnée ci-dessous.



Partie A : Lecture graphique

Les résultats aux questions posées dans cette partie seront donnés en s'aidant du graphique, avec la précision que permet la lecture graphique et en faisant apparaître les traits de construction utiles.

1. Déterminer les volumes hebdomadaires vendus pour lesquels le bénéfice hebdomadaire est égal à 400 euros.
2. Pour quels volumes hebdomadaires vendus, le laboratoire Clamex est-il bénéficiaire ?

Partie B : étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que la courbe donnée dans la partie précédente est la représentation graphique de la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;17]$ par $B(x) = -x^3 + 6x^2 + 180x - 184$.
On note B' la fonction dérivée de la fonction B.

1. (a) Déterminer $B'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~17]$.

   (b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~17]$,

   $$B'(x) = (-3x + 30)(x + 6).$$

   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~17]$.

   (d) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0~;~17]$.
   On fera apparaître les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2. Déterminer le volume hebdomadaire vendu pour obtenir un bénéfice maximal et calculer la valeur de ce bénéfice, en euros.

Exercice 27 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~15]$ par : $f(x) = x^3 - 21x^2 + 120x + 50$.
On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

1. Calculer $f(4)$ et $f(10)$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~15]$, on a : $f'(x) = (3x - 12)(x - 10)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0~;~15]$; pour cela, recopier et compléter le tableau de signes suivant :

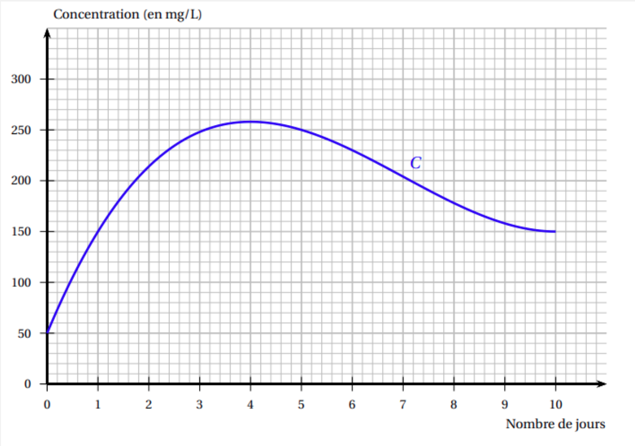
x	0	4	10	15
signe de $3x - 12$				
signe de $x - 10$				
signe de $f'(x)$				

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~15]$.
   On précisera dans ce tableau, sans justification, les valeurs remarquables de $f(x)$.

Partie B

Des analyses ont montré que des microalgues étaient naturellement présentes dans l'eau de mer, avec une concentration normale comprise entre 0 et 100 milligrammes par litre (mg/L). Ces microalgues ont tendance à se multiplier lorsque la salinité de l'eau de mer diminue, et les autorités sanitaires considèrent qu'elles deviennent dangereuses pour la santé lorsque leur concentration dépasse 200 mg/L. Il faut alors prendre des mesures comme l'interdiction de la baignade.

La courbe donnée ci-dessous modélise l'évolution de la concentration en microalgues de l'eau de baignade d'une plage du littoral pendant les 10 jours qui ont suivi un très fort orage.



Il s'agit de la courbe de la fonction f étudiée dans la **partie A** mais dont l'ensemble de définition est, dans cette **partie B**, restreint à l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

Pour chaque question suivante, justifier la réponse en précisant la méthode utilisée (calcul ou lecture graphique) et en expliquant la démarche ; pour la lecture graphique, laisser apparents les pointillés utiles.

1. Pendant combien de jours complets la baignade est-elle interdite ?
2. Quelle est la concentration maximale en microalgues durant les 10 jours suivant l'orage ? Au bout de combien de jours a-t-elle été atteinte ?
3. Peut-on considérer que 10 jours après l'orage, la situation est revenue à la normale ?

Exercice 28 ⋆⋆ [Calculer, Représenter]

On considère la suite définie par $u_n = n^4 - 2n^3 - 5n^2 - 1$ pour $n \geqslant 0$.
Déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 29 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.
Démontrer que :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \Longleftrightarrow -1 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Exercice 30 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Pour $x \in [1\,;5]$, déterminer un encadrement de $f(x)$.

Exercice 31 ⋆⋆⋆ [Calculer, Représenter]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 7x - 4$. La courbe représentative de f admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x + 4$? Si oui, préciser en quel(s) point(s).

Exercice 32 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer, Représenter]

On note f la fonction carrée et g la fonction inverse. Déterminer les tangentes communes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 33 ⋆⋆⋆ [Calculer, Chercher, mo]

Une entreprise souhaite fabriquer des cartons d'emballage. Le cahier des cherges indique que la boîte à construire doit être un parallélépipède rectangle à base carrée et que son volume doit être de $140\,\text{cm}^3$. Aucune restriction supplémentaire n'est cependant précisée quant aux dimensions de la boîte. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour que la quantité de carton utilisée soit la plus petite possible ?