Lycée Lucie Aubrac - Terminale STI2D

Chapitre 2
Dérivation

Table des matières

1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

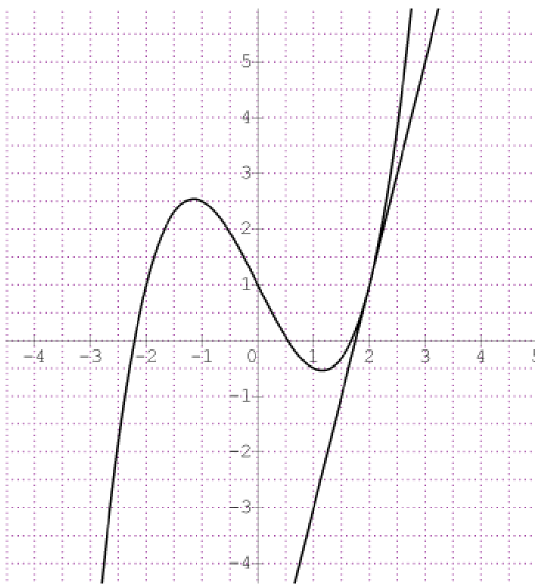
Dans toute la suite de ce chapitre, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction où I est un intervalle et $a \in I$.
$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1 Définition

Définition 1

Le **nombre dérivé** de f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. On le note $f'(a)$.

Exemple. Soit f une fonction dont la courbe est représentée ci-dessous. On a aussi représenté la tangente au point d'abscisse $a = 2$. Déterminer graphiquement $f'(2)$.



Solution :
On choisit deux point appartenant à la tangente. Par exemple $A(1; -3)$ et $B(3; 5)$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{5-(-3)}{3-1} \\ &= \frac{8}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.2 Équation de la tangente à une courbe en un point

Proposition 1

Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente T en $A(a; f(a))$ alors une équation de T est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple. On suppose que f est une fonction telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Solution :
En appliquant la formule pour $a = 2$:
T : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$y = 3(x-2) + 5$
$y = 3x - 1$

2 Fonction dérivée et formules de dérivations

2.1 Définition de la fonction dérivée

Définition 2

La fonction qui a tout réel $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et elle est notée f'.

Remarque. En physique, on utilise la notation $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dfrac{dy}{dx}$ pour désigner f'.
Cela vient du fait que la dérivée est un coefficient directeur, c'est-à-dire un taux de variations entre l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.

2.2 Fonction dérivée des fonctions usuelles

Fonction	$f(x) =$	$f'(x) =$
constante	k	0
affine	$mx+p$	m
carré	x^2	$2x$
puissance	x^n	nx^{n-1}
inverse	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$

Exemple.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Déterminer $f'(2)$.

Solution :
On sait que pour tout x, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi, $f'(2) = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$

2.3 Dérivées et opérations sur les fonctions

u et v déisgnent deux fonctions dérivables sur I et λ un réel.

Dérivée d'une somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit d'une fonction par une constante	$(\lambda \times u)' = \lambda \times u'$
Dérivée d'un produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée d'un inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 3x^2$
3. $f(x) = x(x^2+1)$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$

Solution :

1. $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$
2. $f'(x) = 3 \times 2x$
3. $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$.
   On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi,
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ & = & 1 \times (x^2+1) + x \times 2x \\ & = & 3x^2 + 1 \end{array}$$
4. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 3$.
   On a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$. Ainsi,
$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ & = & \dfrac{2x(x+3) - (x^2+1) \times 1}{(x+3)^2} \\ & = & \dfrac{x^2 + 6x - 1}{(x+3)^2} \end{array}$$

3 Application de la dérivation à l'étude des variations

Proposition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur I si, et seulement si, f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si, et seulement si, f' est négative sur I.
- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.

Remarque.
L'étude du signe de f' permet donc d'obtenir les variations de f. Cela permet également de connaitre les éventuels extremums (maximum ou minimum).

Exemple. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -x^3 - 2x^2 + x + 5$.

1. Dériver f.
2. Montrer que $-3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x - \frac{1}{3})$.
3. En déduire les variations de f.

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$.
2. On développe la deuxième expression :

$$\begin{aligned} -3(x+1)(x-\frac{1}{3}) &= (-3x-3)(x-\frac{1}{3}) \\ &= -3x^2 - 3x \times (-\frac{1}{3}) - 3x + 3 \times \frac{1}{3} \\ &= -3x^2 + x - 3x + 1 \\ &= -3x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -3x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff -3(x+1)(x-\frac{1}{3}) \\ &\iff x + 1 = 0 \text{ ou } x - \frac{1}{3} = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme $x \longmapsto -3x^2 - 2x + 1$ est une fonction polynôme de degré 2 ayant pour coefficient dominant -3, on en déduit son tableau de signe. On en déduit ensuite le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	$\frac{137}{27}$	$\searrow$	