Suites numériques – Généralités – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Calculer dans chacun des cas la valeur de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

1. $u_n = 5n + 2$
2. $u_n = n^2 - 1$
3. $u_n = -3n^2$
4. $u_n = \dfrac{n}{n+5}$

Exercice 2 ⋆ [Représenter]

Dans chaque cas, représenter les cinq premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère adapté.

1. $u_n = n + 2$
2. $u_n = 5n - 5$
3. $u_n = n^2$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Calculer dans chaque cas la valeur des quatre premiers termes de la suite.

1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n - 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n)^n \end{cases}$

Exercice 4 ⋆ [Calculer]

Calculer dans chacun des cas le terme u_5 de la suite u définie par :

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (-3)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $u_n = \sqrt{n^3 + 11}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = 2^{n+5} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ⋆ [Représenter]

On considère l'algorithme suivant.

```
for k in range(1,101):
  U=2*k+3
print(U)
```

1. Quelle sera la valeur affichée par l'algorithme ?
2. On note (u_n) la suite associée aux valeurs calculées successivement par l'algorithme. Donner l'expression du terme général de la suite u_n.

Exercice 6 ⋆ [Représenter]

On considère l'algorithme suivant.

```
U=1
for k in range(216):
  U=U/(U+1)
print(U)
```

1. On note (u_n) la suite associée aux valeurs calculées successivement par l'algorithme. Donner la valeur de u_0 et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
2. A quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme ?

Exercice 7 ⋆⋆ [Représenter]

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par le terme général $u_n = \dfrac{5}{n+1}+4$. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes de la suite.
2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 2$. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes de la suite.

Exercice 8 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux. Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de $1,5\%$ par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.
   (a) Montrer que $d_1 = 0,985d_0$.
   (b) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
   (c) En déduire une expression de d_n en fonction de n
   (d) Conjecturer la limite de la suite d_n.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
N=0
d=400
while d>374:
  N=N+1
  d=0.985d
print(N)
```

Implémenter cet algorithme en Python. Quel est le résultat obtenu. A quoi correspond-t-il ?

Exercice 9 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Représenter, Calculer]

Dans un parc national, on étudie une espèce de renards. Cette population était de 1 240 renards à la fin de l'année 2016. On estime à 15% par an la baisse naturelle du nombre de renard. On suppose que cette évolution restera identique pour les années à venir.

1. On modélise par u_n le nombre de renards dans le parc régional à la fin de l'année $2016+n$. On a donc $u_0 = 1240$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Afin de préserver l'espèce, on décide en fait d'introduire à chaque année 30 renards à partir de la fin de l'année 2017. On note v_n le nombre de renards présents dans le parc à la fin de l'année $2016+n$ (on a toujours $v_0 = 1240$.
   (a) Calculer v_1.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (c) Écrire un fonction algorithmique en langage Python permettant de calculer quel sera le nombre de renard à l'année $2016+n$.
   (d) Tester l'algorithme de la question précédente pour différentes valeurs de n. Conjecturer la limite de la suite et interpréter le résultat.

Exercice 10 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les quatres premiers termes de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$
2. $u_0 = 2$ et $r = -2$
3. $u_0 = -1$ et $r = \dfrac{1}{2}$
4. $u_0 = -\dfrac{4}{3}$ et $r = 0$

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou non. Si oui, donner le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = 5n + 8$
2. $u_n = n^2 - 1$
3. $u_n = 2^n$
4. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$
5. $u_n = \dfrac{3n-5}{7}$
6. $u_n = \dfrac{n^2-n-2}{n+1}$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$
8. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n + 5$

Exercice 12 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$
2. $u_0 = -2$ et $r = -3$
3. $u_0 = 7$ et $r = -\dfrac{3}{4}$

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, on donne la valeur d'un terme d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la raison r de cette suite. Déterminer le premier terme u_0.

1. $u_{11} = 1$ et $r = 3$
2. $u_{19} = \dfrac{7}{3}$ et $r = -\dfrac{1}{4}$

Exercice 14 ⋆⋆ [Calculer]

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 64$
2. $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 1027$
3. $S = 3 + 6 + 9 + \ldots + 1452$
4. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{13} (5k + 1)$
5. $S = 351 + 358 + 365 + \ldots + 715$

Exercice 15 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les quatres premiers termes de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et $q = 2$
2. $u_0 = 2$ et $q = -2$
3. $u_0 = \dfrac{5}{7}$ et $q = 1$
4. $u_0 = -1$ et $q = \dfrac{1}{4}$

Exercice 16 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1$ et $q = 3$
2. $u_0 = 2$ et $q = -3$
3. $u_0 = -7$ et $q = \dfrac{3}{4}$

Exercice 17 ⋆ [Calculer]

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques ou non. Si oui, donner le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = 5n$
2. $u_n = 2^n$
3. $u_n = n^3$
4. $u_n = 3^{n+1}$
5. $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 5}{n + 1}$
6. $u_n = \dfrac{4 \times 5^n}{3}$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + 7$
8. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 7nu_n$

Exercice 18 ⋆ [Calculer]

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 1024$
2. $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{729}$
3. $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{15} 3^i$
4. $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^k$
5. $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \ldots + \dfrac{1}{256} - \dfrac{1}{512}$

Exercice 19 ⋆⋆ [Calculer]

On donne un terme et la raison d'une suite géométrique u :

$$u_{11} = 102{,}6 \quad \text{et} \quad q = 1{,}1$$

Calculer le premier terme u_1 en arrondissant le résultat à 10^{-2}.

Exercice 20 ⋆ [Représenter, Calculer]

Déterminer, pour chacune des suites ci-dessous, ses variations et sa limite.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 5$.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$ et de premier terme $u_0 = 6$.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 5$.
5. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = -5$.

Exercice 21 ⋆⋆ [Modéliser]

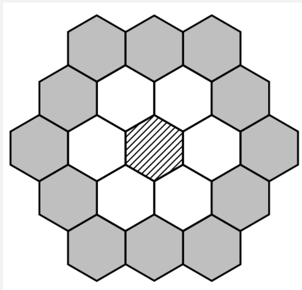
La période du carbone 14 est 5700 ans. Lorsqu'il s'écoule 5700 ans, la masse de carbone a donc été divisée pas 2. On note D_n la masse de carbone 14 d'un échantillon d'os après $n \times 5700$ années. On sait que $D_0 = 100$ (correspondant à 100% de l'échantillon initial).

1. Quelle est la nature de la suite de terme général D_n ?
2. Écrire D_n en fonction de n
3. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 8% de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse, pris comme témoin. Déterminer, au siècle près, l'âge de ces fragments.

Exercice 22 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce. Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- À l'étape 1, il entoure le carreau central, À l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- À l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n^{e} étape ($n \geqslant 1$).
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?
2. On admet que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n (pour $n \geqslant 1$).
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?
   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1+2+3+\ldots+n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.

Suite →

5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n^e étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$. À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977^e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

Exercice 23 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

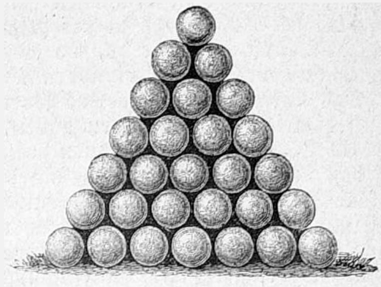
Offre
Intérêts composés au taux annuel constant de 3%.

À la fin de chaque année le capital produit 3% d'intérêts qui sont intégrés au capital.
On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa. On a ainsi $u_0 = 5000$.

1. Montrer que $u_1 = 5150$ et $u_2 = 5304{,}5$.
2. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.
4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10 000 euros ?

Exercice 24 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

On range des rondins de bois en les entassant en forme de pyramide. Par exemple, sur le dessin ci-dessous, il y a 7 rangées de rondins de bois pour un total de 28 rondins.



Combien de rangées complètes de la pyramide peut-on construire si l'on dispose de 500 rondins de bois ?

Exercice 25 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de $3,7\%$ chaque année. On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000+n$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'années à partir de l'an 2000. Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.
5. Des études montrent que 20% de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70% de ces déchets finissent par couler. Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Exercice 26 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

L'énergie houlomotrice est obtenue par exploitation de la force des vagues. Il existe différents dispositifs pour produire de l'électricité à partir de cette énergie. Les installations houlomotrices doivent être capables de résister à des conditions extrêmes, ce qui explique que le coût actuel de production d'électricité par énergie houlomotrice est élevé. On estime qu'en 2018 le coût de production d'un kilowattheure (kWh) par énergie houlomotrice était de 24 centimes d'euros. C'est nettement plus que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire, qui était de 6 centimes d'euros en 2018. On admet qu'à partir de 2018 les progrès technologiques permettront une baisse de 5% par an du coût de production d'un kilowattheure par énergie houlomotrice.

Pour tout entier naturel n, on note cn le coût de production, en centime d'euro, d'un kilowattheure d'électricité produite par énergie houlomotrice pour l'année $2018+n$. Ainsi, $c_0 = 24$.

1. (a) Calculer c_1. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Déterminer la nature de la suite (c_n) et donner ses éléments caractéristiques.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de n.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,95^n < 0,25$.
3. Dans cette question, on admet que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire reste constant et égal à 6 centimes d'euros. Déterminer l'année à partir de laquelle le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire.

4. Dans cette question, on estime que le coût de production d'un kilowattheure par énergie nucléaire va augmenter tous les ans d'un centime d'euro. On souhaite alors déterminer l'année à partir de laquelle le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire.
   (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin que la valeur de la variable N en sortie d'algorithme permette de répondre au problème.

```
C=24
D=6
N=2018
while .... :
    C=...
    D=...
    N=N+1
```

   (b) Répondre au problème posé. Aucune justification n'est demandée.

Exercice 27 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 660$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0{,}99u_n - 0{,}1$.

1. La suite (u_n) est-elle géométrique ? est-elle arithmétique ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n + 10$ (pour tout entier $n \geqslant 0$).
3. Montrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_n = 670 \times 0{,}99^n - 10.$$

Exercice 28 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons. Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2% par semaine. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau.

Partie A

1. Quel volume d'eau restera-t-il dans l'aquarium au bout d'une semaine ?
2. Est-il vrai qu'au bout de deux semaines, exactement 4% du volume d'eau initial se seront évaporés ? Justifier.
3. Déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau dans l'aquarium deviendra insuffisant.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2%. On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Vérifier que $u_2 = 278{,}812$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 5$.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.
   (b) Calculer v_0.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 30 \times 0{,}98^n + 250$.
   (e) Justifier que la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.

Exercice 29 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

Léo envisage l'achat d'un téléphone portable dont la capacité de stockage est de 32 gigaoctets (Go). Selon la notice, la configuration initiale du téléphone nécessite 20 % de cette capacité pour le système d'exploitation.

1. Calculer le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation après la configuration initiale du téléphone.

En raison des différentes mises à jour, Léo estime que le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation augmente de 0,5 % par mois.

1. On note u_0 le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation après la configuration initiale de son téléphone. Ainsi $u_0 = 6,4$.
   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation, n mois après la configuration initiale du téléphone.
   (a) Montrer que $u_1 = 6,432$. Interpréter le résultat.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
   (d) Calculer le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation 2 ans après la configuration initiale du téléphone.

   Léo estime que pour utiliser son téléphone dans de bonnes conditions, celui-ci doit disposer d'une capacité de stockage disponible d'au moins 4 Go.

   (a) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inéquation

   $$6,4 \times 1,005^n > 28.$$

   Indiquer la démarche utilisée.
   (b) Interpréter le résultat précédent.

Léo estime que, chaque mois, les nouvelles photos et les nouveaux messages occuperont 450 mégaoctets (Mo) supplémentaires. Il décide de ne rien supprimer.

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation, les photos et les messages au bout de n mois après la configuration initiale du téléphone.
   Ainsi $v_0 = 6,4$.
   (a) Justifier que :
   $v_n = 6,4 \times 1,005^n + 0,45n$.
   (b) Calculer le nombre de gigaoctets utilisés 2 ans après la configuration initiale du téléphone.
   (c) Léo écrit l'algorithme suivant.

   ```
   n ← 0
   v ← 6,4
   Tant que v ⩽ 28
      n ← n + 1
      v ← 6,4 × 1,005^n + 0,45n
   Fin Tant que
   ```

   Que représente le contenu de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (d) On rappelle que, pour être utilisé dans de bonnes conditions, le téléphone doit disposer d'une capacité de stockage disponible d'au moins 4 Go.
   Au bout de combien de mois le téléphone de Léo n'aura-t-il plus suffisamment de capacité de stockage ?
3. Pour un téléphone d'une capacité de stockage de 64 Go, on admet que la configuration initiale nécessite 10 Go.
   Avec une telle capacité de stockage, Léo pourra -t-il utiliser ce téléphone dans de bonnes conditions deux fois plus longtemps que le modèle de 32 Go ?

Exercice 30 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

En 2015, la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France était de 56 térawattheures (TWh).

1. On admet que cette consommation augmente de 4 % par an depuis 2015.
   Pour tout entier naturel n, on note u_n la consommation d'électricité liée aux usages du numérique en France,exprimée en térawattheure, pour l'année $2015 + n$.
   Ainsi, $u_0 = 56$.
   (a) Calculer la consommation d'électricité, exprimée en TWh, liée aux usages du numérique en 2016.
   (b) Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner ses éléments caractéristiques.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   (d) On admet que chaque année, la consommation d'électricité en France, tous usages confondus, est égale à 480 TWh.
   Est-il exact d'affirmer qu'en 2030, plus de 20 % de la consommation d'électricité sera liée aux usages du numérique ? Justifier la réponse.
2. On estime qu'en 2030, en France, la consommation d'électricité liée aux usages du numérique sera de 101 TWh.
   À partir de 2030, on envisage une baisse de la consommation d'électricité liée aux usages du numérique de 3 TWh par an.
   Déterminer en quelle année la consommation d'électricité liée aux usages du numérique sera égale à la consommation en 2015.

Exercice 31 ⋆⋆⋆ [Chercher, Modéliser, Calculer]

La loutre d'Europe est un mammifère carnivore de la famille des mustélidés.

Sa population n'a cessé de décroître en France en raison de la dégradation de son milieu naturel, mais également parce que cette espèce est victime de pièges posés par les chasseurs.

PARTIE A :

La population de loutres d'Europe était en France de 50000 individus au 1er janvier 1930. On estime que depuis cette date, la population a perdu 5 % de ses individus chaque année en raison de la dégradation du milieu naturel.

1. Calculer la population de loutres d'Europe en France au 1er janvier 1931.

On fait l'hypothèse qu'en plus de la chute démographique due à la dégradation du milieu naturel, 68 individus sont piégés tous les ans entre le 1er janvier et le 31 décembre.

On modélise la population de loutres d'Europe en France par la suite (u_n) définie par $u_0 = 50000$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,95u_n - 68.$$

L'arrondi à l'unité de u_n est alors égal au nombre de loutres de la population le 1er janvier de l'année $1930 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. L'algorithme ci-dessous permet d'estimer l'année à partir de laquelle la population de loutres d'Europe en France comptera moins de 1000 individus.

```
N ← 1930
U ← 50000
Tant que ......
    N ← N + 1
    U ← .......
Fin Tant que
```

Recopier et compléter cet algorithme.

2. On estime que l'espèce est en danger d'extinction si elle comporte moins de 1000 individus.

   Justifier le fait qu'un plan de réintroduction de la loutre d'Europe ait été mis en place en France à partir de l'année 1991.

PARTIE B :

À partir de 1991, la population de loutres d'Europe perd toujours 5 % de ses individus chaque année, mais le plan de sauvegarde prévoit :

- l'interdiction de la pose de pièges ;
- la réintroduction de 250 jeunes loutres au 31 décembre de chaque année.

On suppose que la population au 1er janvier 1991 s'élève à 1000 loutres.

On modélise la population à partir du 1er janvier 1991 par la suite (v_n) définie par $v_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,95v_n + 250.$$

L'arrondi à l'unité de v_n représente le nombre de loutres au premier janvier de l'année $1991 + n$.

1. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 5000$.

   Justifier que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.

   Préciser son terme initial w_0.
2. Exprimer alors w_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 5000 - 4000 \times 0,95^n$.
4. Dans l'hypothèse où l'on conserve la même évolution tous les ans, la population de loutres d'Europe en France peut-elle à long terme retrouver l'effectif de 1930 ?

   Justifier.