Lycée Lucie Aubrac - Terminale STI2D

Chapitre 1
Suites numériques

Table des matières

1 Généralités sur les suites

1.1 Définition d'une suite

Définition 1

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une suite numérique u est une fonction définie sur $E_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \left\{ \begin{array}{lcr} E_{n_0} & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

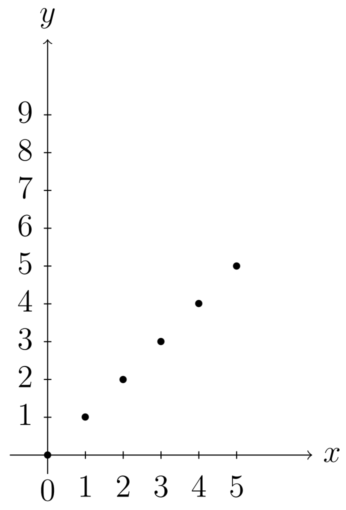
Remarque.
Plutôt que de noter $u(n)$, on préfère généralement noter u_n (appelé le « terme d'indice n de la suite »). De plus, on note parfois $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite u.

Exemples.

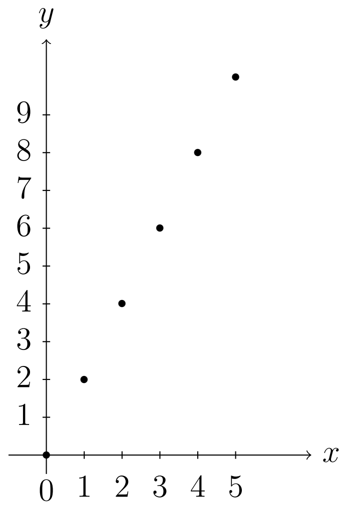
- La suite des nombres entiers définie par $u_n = n$:
  $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ \ldots,$.
- La suite des nombres pairs définie par $u_n = 2n$:
  $u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ \ldots,$.
- La suite des nombres impairs définie par $u_n = 2n + 1$:
  $u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7\ \ldots,$.

Exemple.
Pour chacune des trois suites précédentes, représenter graphiquement les termes de la suite (en plaçant les points de coordonnées (n, u_n) dans un plan repéré).

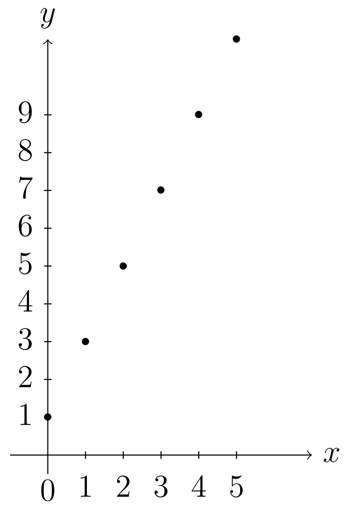
Solution :



Suite des nombres entiers



Suite des nombres pairs



Suite des nombres impairs

1.2 Suite définie de manière explicite

Définition 2

Définir une suite par une formule explicite, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n

Exemple.
On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Calculer u_3.

Solution :

$$u_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

1.3 Suite définie par une relation de récurrence

Définition 3

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent.

Exemple.
On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + \frac{1}{2}$$

Calculer u_3.

Solution :

$$\begin{aligned}
\text{Pour } n = 0 : u_{0+1} &= 3u_0 + \frac{1}{2} \\
u_1 &= 3 \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
\text{Pour } n = 1 : u_{1+1} &= 3u_1 + \frac{1}{2} \\
u_2 &= 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\
\text{Pour } n = 2 : u_{2+1} &= 3u_2 + \frac{1}{2} \\
u_3 &= 3 \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Remarque. Lorsqu'une suite est définie de manière explicite, on peut calculer un terme de la suite sans connaître les termes précédents. En revanche, lorsqu'une suite est définie par une relation de récurrence, il faut calculer tous les termes précédents pour obtenir un des termes de la suite.

1.4 Sens de variation d'une suite

Définition 4

- Une suite u est **croissante** si pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite u est **décroissante** lorsque, pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarque.

- Si l'inégalité vérifiée par la suite est stricte, on dit que la suite est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).
- Attention ! Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
  Par exemple, c'est le cas de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$.

2 Les suites arithmétiques

2.1 Expression par récurrence et expression explicite

Définition 5

Une suite est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode – Montrer qu'une suite est arithmétique

- Calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Montrer que pour tout n, cette différence est constante et ne dépend pas de n.

Exemple.
Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 4$ est arithmétique et préciser sa raison.

Solution :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (5(n+1) - 4) - (5n - 4) = 5n + 5 - 4 - 5n + 4 = 5$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 5.

Proposition 1

- Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :
  $$u_n = u_0 + nr, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
- Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :
  $$u_n = u_1 + (n-1)r, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

Démonstration.
Pour calculer u_n à partir de u_0, il faut ajouter n fois la raison r, d'où le fait que $u_n = u_0 + nr$. Dans le cas où le premier terme est u_1, il y a $(n-1)$ termes entre u_1 et u_n, d'où le second résultat. □

Remarque.
On peut retenir que :

$$u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison}).$$

2.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition 2

Pour tout entier naturel n non nul,

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On note $S = 1 + 2 + \ldots + n$. On va alors calculer astucieusement $S + S$ pour en déduire la valeur de S. On a :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Ainsi, $S + S = 2S = n \times (n+1)$ et on en déduit que $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

Proposition 3

- Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :
$$u_0 + u_1 + \ldots u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$
- Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :
$$u_1 + \ldots u_n = n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right).$$

Remarque.
On peut retenir que si S est la somme des termes d'une suite airhtmétique :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple.
Calculer la somme $10 + 13 + 16 + 19 + \ldots + 163$.

Solution :
$10 + 13 + 16 + 19 + \ldots + 163 = u_0 + u_1 + \ldots + u_{51}$ où u_n est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 3.
On a donc :

$$\begin{aligned} 10 + 13 + 16 + 19 + \ldots + 163 &= (51+1) \times \left(\frac{10 + 163}{2}\right) \\ &= 4498 \end{aligned}$$

2.3 Variations d'une suite arithmétique

Proposition 4

Une suite arithmétique de raison r est :

- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

2.4 Limite d'une suite arithmétique

Proposition 5

Si u est une suite arithmétique de raison r alors :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ si $r = 0$.

3 Les suites géométriques

3.1 Expression par récurrence et expression explicite

Définition 6

Une suite est dite **géométrique** s'il existe $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode – Montrer qu'une suite est géométrique

- Calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Montrer que pour tout n, ce quotient est constant et ne dépend pas de n.

Exemple.
Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$ est géométrique et préciser sa raison.

Solution :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

Proposition 6

- Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :
$$u_n = u_0 q^n, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$
- Pour une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q :
$$u_n = u_1 q^{n-1}, \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Démonstration.
Pour calculer u_n à partir de u_0, il faut multiplier n fois par la raison q, d'où le fait que $u_n = u_0 q^n$. Dans le cas où le premier terme est u_1, il y a $(n-1)$ termes entre u_1 et u_n, d'où le second résultat. □

Remarque.
On peut retenir que :

$$u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}.$$

Exemple.
Dans un pays donné, on note u_n le nombre d'habitants à l'année $2000 + n$. On suppose que $u_0 = 10^6$ et que le nombre d'habitants augmente de 1% par an. Calculer le nombre d'habitants de ce pays en 2020.

Solution :
L'année 2020 correspond à $n = 20$ et il faut donc calculer u_{20}.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une suite géométrique de raison 1,01 (car augmenter de 1% une quantité revient à la multiplier par 1,01). Ainsi,

$$u_{20} = u_0 q^{20} = 10^6 \times 1{,}01^{20} \simeq 1{,}22 \times 10^6.$$

Remarque.
La plupart du temps, lorsqu'on est dans une situation où une quantité (un prix, un salaire, un nombre de kilos produits, un nombre de personnes...) augmente ou diminue de x pourcent chaque année (avec le même pourcentage), cette quantitié est une suite géométrique.

3.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 7

Si $q \neq 1$, et si u est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarque.
Si le premier terme de la suite géométrique est u_1 et que la raison est $q \neq 1$, on a :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

De manière générale, on peut retenir que la somme est donnée par :

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - (\text{raison})}$$

Exemple.
Calculer la somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 + 2^9$.

Solution :
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 + 2^9 = \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023$.

3.3 Variations d'une suite géométrique

Proposition 8

Une suite géométrique u de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$ est :
- croissante si $q > 1$;
- décroissante si $0 < q < 1$;
- constante si $q = 1$.

Remarque.
Si la raison d'une suite géométrique est strictement négative, la suite n'est pas monotone.

3.4 Limite d'une suite géométrique

Proposition 9

Si u est une suite géométrique de raison $q > 0$ alors :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $q > 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ si $0 < q < 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ si $q = 1$.

Remarque.
Si la raison d'une suite géométrique est strictement négative, la suite n'admet pas de limite.