Variables aléatoires – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

1.

x_i	1	3	5	12
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,2	0,65	0,07	0,08

2.

Valeur	-2	-1	0	3
Probabilité	0,12	0,3	0,28	0,2

Exercice 2 ⋆ [Calculer, Modéliser]

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 5 € si on tire une figure et on perd 4 € sinon. Quelle est l'espérance de ce jeu ?

Exercice 3 ⋆ [Calculer, Modéliser]

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 20 € si on tire l'as de cœur, 10 € pour un autre as, 5 € pour un roi et on perd 3 € sinon. Quelle est l'espérance de ce jeu ?

Exercice 4 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Représenter]

On lance deux dés équilibrés à six faces et on note S la variable aléatoire donnant la somme des deux résultats obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de S puis calculer $\mathrm{E}(S)$.
2. Écrire un algortihme en langage Python (utiliser la fonction **randint**) permettant de vérifier ce résultat expérimentalement.

Exercice 5 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée. Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

- Pour le trajet de Paris à Orléans, 30% d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.
- Pour le trajet d'Orléans à Limoges :
  - parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40% prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ;
  - parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45% prennent la route départementale , les autres prennent l'autoroute.

On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant, en journée classée rouge, le trajet Paris – Limoges en passant par Orléans.
On note N l'événement « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans »et D l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges ».

1. Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la Route Départementale entre Orléans et Limoges est 0,565.

Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :

- Paris – Orléans, par autoroute : 3 heures ;
- Orléans – Limoges, par autoroute : 4 heures ;
- Orléans – Limoges, par départementale : 3 heures et demie.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, qui donne pour chaque trajet, le temps en heure et la probabilité :

Évén.	$N \cap D$	$N \cap \overline{D}$	$\overline{N} \cap D$	$\overline{N} \cap \overline{D}$
Temps (en h)	5,5			
Proba.	0,12			

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire qui donne la durée du trajet en heure et en donner une interprétation.

Exercice 6 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur un smartphone vendu à 800 € : il propose une assurance complémentaire pour 50 € ainsi qu'une coque à 20 €. Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone :

- 40% des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
- Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20% ont acheté en plus la coque.
- Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.

Déterminer la dépense moyenne d'un client de ce magasin ayant acheté ce smartphone.

Exercice 7 $\star\star$ [Modéliser, Calculer]

Une société d'assurance fait un bilan des sinistres qu'elle a eu à rembourser sur plusieurs années. Il apparaît qu'au cours d'une année, 60% des assurés font face à un sinistre. De plus, on estime que pour 50% d'entre eux, l'assurance rembourse 100 €. Pour 35% d'entre eux, elle rembourse 500 €. Enfin, pour 15% des assurés connaissant un sinistre, l'assurance rembourse 1500 €. Chaque assuré paie la même cotisation annuelle. Quelle doit être le montant de la cotisation pour que l'assurance puisse espérer ne pas perdre d'argent en moyenne ?

Exercice 8 $\star$ [Modéliser]

On considère une urne dans laquelle sont disposées 4 boules rouges et 6 boules noires. Imaginez une expérience aléatoire qui soit une épreuve de Bernoulli et une qui n'en soit pas.

Exercice 9 $\star$ [Communiquer, Calculer]

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard et on considère le succès : « obtenir un as ». Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et déterminer son paramètre.

Exercice 10 $\star\star$ [Modéliser, Calculer]

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est l'espérance et la variance de X ?
3. Imaginer une situation concrète qui peut être modélisée par cette variable aléatoire.

Exercice 11 $\star$ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{3}{2}; \quad \binom{5}{3}; \quad \binom{7}{3}; \quad \binom{21}{2}$$

Exercice 12 $\star$ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer tous les coefficients binomiaux de la forme $\binom{10}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 10.

Exercice 13 $\star$ [Calculer]

À l'aide de la calculatrice, déterminer un ordre de grandeur de $\binom{74}{35}$.

Exercice 14 $\star$ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 15 $\star$ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 16 $\star$ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. Déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$.

Exercice 17 $\star$ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}1$. Déterminer $\mathrm{P}(X \leqslant 2)$.

Exercice 18 ⋆ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}17$. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 19 ⋆⋆ [Calculer]

Soit X un variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = \frac{1}{2}$. Déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant 2)$.

Exercice 20 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine. Le nombre de « menu terroir » qui seront alors commandé est une variable aléatoire X. On considère que la probabilité qu'un des clients commande un « menu terroir »est $p = 0{,}3$. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

1. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de « menus terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315.

Exercice 21 ⋆⋆ [Calculer, Modéliser]

Un fabricant de processeurs pour téléphone portable certifie que, dans son stock, la probabilité qu'un processeur neuf soit défectueux est $p = 0{,}0001$. On désigne par Y la variable aléatoire correspondant au nombre de processeurs défectueux dans un lot de 200 prélevés au hasard. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Ainsi, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}0001$. Déterminer la probabilité, arrondie au millième, qu'il n'y ait aucun processeur défectueux dans un lot de 200 processeurs.

Exercice 22 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Une compagnie ferroviaire réalise un sondage de satisfaction auprès des usagers. On estime que la proportions d'usagers qui s'estiment satisfaits est de 0,72. On choisit au hasard un échantillon de 334 usagers. Le nombre d'usagers peut être modélisé par une variable aléatoire X.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer le nombre moyen d'usagers auquel on peut s'attendre sur les 334 usagers.
3. Calculer $\mathrm{P}(X > 250)$. Interpréter le résultat.

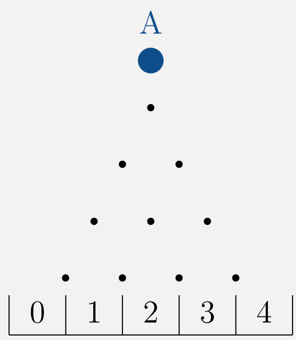
Exercice 23 ⋆⋆ [Modéliser, Calculer]

Une entreprise produit des pièces de moteurs. On note D l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ». On suppose que $\mathrm{P}(D) = 0{,}02$. On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématiques, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

Exercice 24 ⋆⋆⋆ [Calculer, Modéliser, Représenter]

Un joueur lache une bille sur un plan incliné sur laquelle on a planté des clous (voir la figure ci-dessous). La bille est lachée depuis la point A. À chaque clou rencontré, la bille tombe de manière équiprobable à gauche ou à droite du clou. En fin de parcours, elle se retrouve donc dans l'une des cases numérotées de 0 à 4.



1. Pour chacune des cases, calculer la probabilité que la bille tombe dedans.
2. On souhaite vérifier le résultat par une modélisation informatique. Écrire un algorithme en langage Python permettant de modéliser le lacher de 1000 billes et calculant le nombre de billes tombées dans chacune des cases.
3. Tester l'algorithme à plusieurs reprises. Les résultats semblent-ils conformes aux probabilités calculées à la question 1 ?

Exercice 25 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Représenter, Calculer]

Lors d'une évaluation, les 30 élèves d'une classe obtiennent les notes suivantes :

$$18\,;\,6\,;\,7\,;\,9\,;\,13\,;\,7\,;\,10\,;\,8\,;\,15\,;\,11\,;\,6\,;\,4\,;\,8\,;\,11\,;\,5\,;\,17\,;\,9\,;\,10\,;\,14\,;\,7\,;\,9\,;\,8\,;\,9\,;\,4\,;\,14\,;\,2\,;\,10\,;\,7\,;\,10\,;\,5.$$

Quelle fonction affine doit-on appliquer aux notes des élèves afin que la moyenne soit rammenée à 10 et l'écart-type à 3 ?

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Chercher, Représenter, Modéliser]

On lance 1000 fois un dé équilibré à six faces. Écrire un algorithme en langage Python permettant d'estimer la probabilité d'obtenir entre 140 et 190 fois le résultat 6.