Lycée Lucie Aubrac - Terminale STI2D

Chapitre 12
Variables aléatoires

Table des matières

Introduction

Une association étudiante souhaite organiser un jeu de dés afin de récolter de l'argent. Les règles du jeu sont les suivantes. Le joueur lance un dé équilibré à six faces.

- Il gagne s'il obtient un 6 et l'association lui donne 12 euros.
- Il perd dans tous les autres cas et il donne 2 euros à l'association.

L'association organise 500 parties de ce jeu. Pensez vous qu'elle peut espérer gagner de l'argent ?

1 Notion de variable aléatoire

1.1 Définitions

Définition 1

Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$.
À chaque issue de Ω, on associe un nombre réel.

Définition 2

Soit x un réel. L'événement « $X = x$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x.

Exemple.
Avec l'exemple d'introduction :
L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain en euros de l'association sur une partie.
L'événement « $X = 6$ » correspond aux issues 1, 2, 3, 4, 5.
L'événement « $X = -12$ » correspond à l'issue 6.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3

Pour définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

- On liste les valeurs x_i possibles pour X ;
- On détermine les probabilités $P(X = x_i)$.

Méthode – Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On forme le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Remarque.
Dans le tableau, on a :

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Exemple.
Avec l'exemple d'introduction : Si X est le gain de l'association sur une partie, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-12	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

1.3 Espérance

Définition 4

Soit X une variable aléatoire. On appelle **espérance** de X le nombre :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{k=1}^{n} p_ix_i$$

Remarque.
Le mot « espérance » vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur lorsque le nombre de parties est important.

Exemple.
Avec l'exemple d'introduction :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 = (-12) \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{5}{6} = 3.$$

Cela signifie que le jeu est défavorable au joueur et qu'en moyenne, l'association gagnera 3 euros par partie. Par conséquent, sur 500 parties, elle peut espérer gagner environ 1500 euros.

2 Loi de Bernoulli et Loi binomiale

Introduction

On lance trois fois un dé équilibré à six faces. On note X le nombre de 6 obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2.1 Loi de Bernoulli

Définition 5 – Loi de Bernoulli

On dit qu'un variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Remarque.
En général, l'issue 1 est associée à un succès et l'issue 0 est associée à un échec.

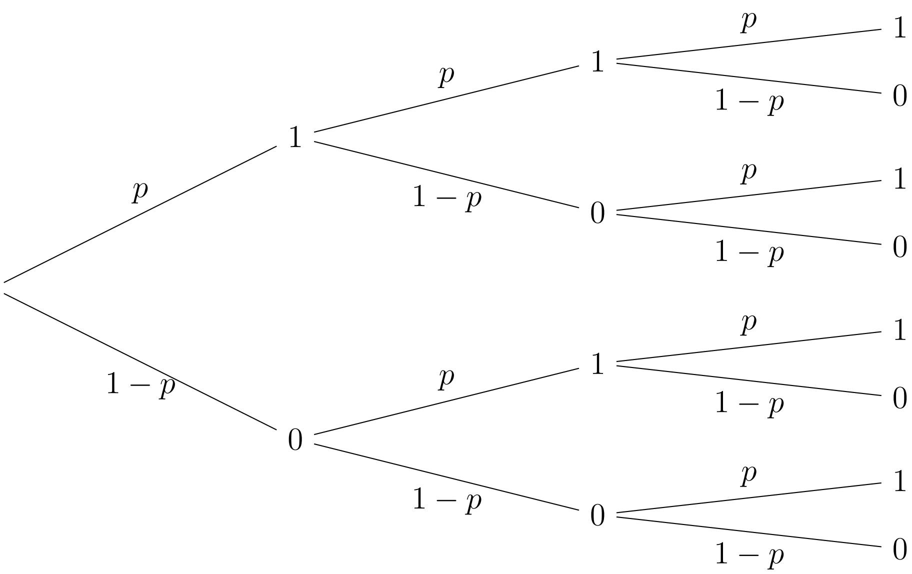
Exemple.
On lance un dé équilibré à six faces. On note $X = 1$ si le résultat est pair et $X = 0$ sinon. Dans ce cas, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

2.2 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Définition 6 – Schéma de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire associée à une variable suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette expérience est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Exemple.
Cas d'un schéma de Bernoulli pour $n = 3$.



Définition 7 – Coefficients binomiaux

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
L'entier $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial** et désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Exemple.
Pour $n = 3$, il y a 3 chemins correspondant à 2 succès. On a ainsi $\binom{3}{2} = 3$.

Proposition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{n-1} = n$

Démonstration.
Immédiat en déterminant le nombre de chemins correspondant à k succès. □

Proposition 2 – Relation de Pascal

Soit $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration.
Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins correspondant à k succès dans un arbre à n étapes.
On va calculer ce nombre de chemins d'une autre manière.
On considère la première étape :

- Si la première étape est un succès (1), il faut alors encore $k-1$ succès parmi les $n-1$ étapes restantes pour former un chemin à k succès. Par définition, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ chemins de ce type.
- Si la première étape est un échec (0), il faut alors encore k succès parmi les $n-1$ étapes restantes pour former un chemin à k succès. Par définition, il y a $\binom{n-1}{k}$ chemins de ce type.

Au total, il y a donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ chemins à k succès dans un arbre à n étapes, d'où l'égalité :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

Exemple.
Pour $n = 4$ et $k = 2$, la formule donne :

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}.$$

Remarque.
La relation de Pascal permet de construire le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**.
Chaque coefficient s'obtient en ajoutant le coefficient au dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Chaque coefficient binomial peut ainsi être calculé. Par exemple, on sait que $\binom{5}{3} = 10$.

2.3 Loi binomiale

Définition 8 – Loi Binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenu parmi les n épreuves suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Proposition 3

Soit X une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration. Pour calculer $P(X = k)$ à partir de l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves, il faut :

- Déterminer le nombre de chemins à k succès. Il y en a $\binom{n}{k}$.
- Déterminer la probabilité correspondant à un chemin de k succès. Sur un tel chemin, il y a k succès (de probabilité p et $n - k$ échecs (de probabilité $n - p$). La probabilité correspondant à un tel chemin est donc $p^k(1-p)^{n-k}$.

Finalement, on en déduit que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Proposition 4 – (admise)

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors

$$E(X) = np.$$

Exemple. On lance 60 fois un dé équilibré à 6 faces.
On note X le nombre de fois où l'on obtient 6. L'expérience est un schéma de Bernouilli donc la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès à chaque étape). Ainsi, $E(X) = np = 60 \times \frac{1}{6} = 10$. Cela signifie qu'en lançant 60 fois un dé, on obtiendra en moyenne 10 fois un 6.