Nombres complexes – Exercices

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z = 3 + 2i$
2. $z = 1 - i$
3. $z = 5$
4. $z = i$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (1 + i) + (2 + i)$
2. $z = 3 + 2i - i - 1$
3. $z = (4 + 5i) - (1 - i)$
4. $z = 2i - \left(-\frac{1}{2}i - 1\right) + 2 + i$

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = i(1 - 2i)$
2. $z = (1 + i)(2 + i)$
3. $z = -(3 + i)(-1 - 2i)$
4. $z = 2\left(-\frac{1}{2}i - 1\right)\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)$

Exercice 4 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (2 + 2i)^2$
2. $z = i(1 - i)^2$
3. $z = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$
4. $z = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)^2$

Exercice 5 ⋆⋆⋆ [Chercher]

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :

$$z = i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}.$$

Exercice 6 ⋆⋆⋆ [Chercher, Calculer]

On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que j est solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
2. Montrer que j est solution de l'équation $x^3 = 1$.
3. En déduire la forme algébrique de j^{2022}.

Exercice 7 ⋆ [Calculer]

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = -3 - 2i$
3. $z = 2i$
4. $z = i - 1$

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3i = z - 3i$
2. $\overline{z} + 3z = 1 - z$
3. $2\overline{z} - z = 3 + iz$
4. $\overline{3z} + 2i - 1 = i - 2z$
5. $\overline{z} = 2 - z$
6. $\overline{z} = 2i - z$
7. $\overline{z} = 3i + z$

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les système suivants :

1. $\begin{cases} z_1 + z_2 & = & 3i \\ 2z_1 - 3z_2 & = & 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1 + 5z_2 & = & i \\ 2\overline{z_1} - 3\overline{z_2} & = & 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} iz_1 + 5z_2 & = & 2 \\ \overline{z_1} - 3i\overline{z_2} & = & i \end{cases}$
4. $\begin{cases} z_1 + z_2 & = & 1 \\ 4z_1 - 3i\overline{z_2} & = & 4 \end{cases}$

Exercice 10 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1+i}$
2. $z = \dfrac{3+i}{5+2i}$
3. $z = -\dfrac{5i}{7-2i}$
4. $z = \dfrac{5+4i}{3-2i}$

Exercice 11 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \overline{\overline{1-3i}}$
2. $z = \overline{(1+i)^2}$
3. $z = \overline{(1+i)\overline{(5+7i)}}$
4. $z = \overline{\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)}$
5. $z = \dfrac{\overline{5+4i}}{\overline{3-2i}}$

   Indication pour la question 5 :
   la forme algébrique de $\dfrac{5+4i}{3-2i}$ a déjà été calculée dans l'exercice .

Exercice 12 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

Exercice 13 ⋆ [Représenter]

1. Dans un repère orthonormé, placer les points A, B, C, D et E dont les affixes sont données ci-dessous :
   - $z_A = 3 + 2i$
   - $z_B = 1 + i$
   - $z_C = -4i$
   - $z_D = -3$
   - $z_E = -1 + 2i$
2. Déterminer les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$.
3. Déterminer les longueurs AB, AE, BD et CE.

Exercice 14 ⋆ [Calculer]

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = 2\pi i$
3. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$
4. $z = -5 - 5i$
5. $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

Exercice 15 ⋆ [Représenter]

Dans un repère orthonormé, placer les points ayant pour module r et argment θ.

1. $r_1 = 3$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$
2. $r_2 = 1$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$
3. $r_3 = 2$ et $\theta_3 = -\frac{\pi}{6}$
4. $r_4 = 1$ et $\theta_4 = \frac{7\pi}{6}$
5. $r_5 = 2$ et $\theta_5 = 0$
6. $r_6 = \frac{1}{2}$ et $\theta_6 = \frac{3\pi}{4}$
7. $r_7 = 3$ et $\theta_7 = \pi$

Exercice 16 ⋆ [Représenter]

Dans un repère orthonormé :

1. Représenter l'ensemble des points M d'affixes z tels que $\mathrm{Re}(z) = 4$.
2. Représenter l'ensemble des points N d'affixes z tels que $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$.
3. Représenter l'ensemble des points L d'affixes z tels que $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$.

Exercice 17 ⋆ [Représenter]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants dont on donne le module r et l'argument θ :

1. $r_1 = 3$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$
2. $r_2 = 1$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$
3. $r_3 = 2$ et $\theta_3 = -\frac{\pi}{6}$
4. $r_4 = 1$ et $\theta_4 = \frac{7\pi}{6}$
5. $r_5 = 2$ et $\theta_5 = 0$
6. $r_6 = \frac{1}{2}$ et $\theta_6 = \frac{3\pi}{4}$
7. $r_7 = 3$ et $\theta_7 = \pi$

Exercice 18 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants dont on donne le module r et l'argument θ :

1. $r = 5$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$
2. $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$
3. $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$
4. $r = 11$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$
5. $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pi$
6. $r = \pi$ et $\theta = 0$

Exercice 19 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z = 2 + 2i$
2. $z = -3i$
3. $z = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$
5. $z = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$

Exercice 20 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z = 5e^{i\frac{4i\pi}{3}}$
3. $z = 4e^{\frac{-5i\pi}{6}}$
4. $z = -e^{\frac{7i\pi}{3}}$
5. $z = 5e^{\frac{3i\pi}{2}}$

Exercice 21 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = -i$
3. $z = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$
5. $z = -5 - 5i$

Exercice 22 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer l'argument de $z = -2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 23 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique de :

$$(-1 + i)^{13}.$$

Exercice 24 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique de :

$$(\sqrt{3} - i)^{7}.$$

Exercice 25 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique de :

$$(1 + i)^{35}.$$

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Modéliser On représente parfois les résistances dans les circuits électroniques par des nombres complexes.

- L'impédance d'une résistance pure est par exemple représentée par le nombre réel $Z_R = R$. C'est le seul composant à avoir une impédance réelle.
- L'impédance d'une bobine d'inductance L et représenté par le nombre complexe $Z_L = iL\omega$ où ω désigne la pulsation du signal dépend de l'intensité du courant présent dans le circuit.

Dans un circuit, une résistance positionnée en parallèle avec une bobine peut être modélisée par un unique composant dont l'impédance Z vérifie :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}.$$

1. Montrer que $Z = \dfrac{iRL\omega}{R + iL\omega}$.
2. Donner la forme algébrique de Z en fonction de R, de L et de ω.

Exercice 27 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme exponentielle de :

$$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{3}}.$$