Lycée Lucie Aubrac - Terminale STI2D

Chapitre 10
Nombres complexes

Table des matières

1 Définition et propriétés algébriques des nombres complexes

1.1 Définition d'un nombre complexe

Définition 1

- Il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$
- Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque.
On ne note pas $\sqrt{-1}$ pour éviter les confusions. Sinon, on pourrait être tenté d'écrire par exemple :

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Définition 2

- L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z.
- Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque.
La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.

Exemples.

- $5 + i$ est un nombre complexe avec $a = 5$ et $b = 1$.
- Les nombres réels sont des cas particuliers de nombres complexes (avec $b = 0$).

1.2 Nombres complexes et opérations

Proposition 1

Pour effectuer des calculs avec des nombres complexes dont on connaît la forme algébrique, on procède de manière habituelle comme lorsque l'on effectue du calcul littéral avec une variable x tout en utilisant le fait que $i^2 = -1$.

Exemple.
Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 + 3i$.

1. Calculer $z + z'$
2. Calculer $z \times z'$

Solution :

1. $z + z' = (1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + i(1 + 3) = 3 + 4i$
2. $z \times z' = (1 + i) \times (2 + 3i) = 2 + 3i + 2i + 3i^2 = 2 + 3i + 2i - 3 = -1 + 5i$

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3

Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z).$$

Exemple.
Si $z = -1 + 3i$, alors $\overline{z} = -1 - 3i$.

Proposition 2

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. Si $z_1 \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$
4. Si $z_2 \neq 0$ alors $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Exemple.
$\overline{(1 + i)(2 - 3i)} = \overline{1 + i} \times \overline{2 - 3i} = (1 - i) \times (2 + 3i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 2 + 3i - 2i + 3 = 5 + i$

Méthode – Calculer la forme algébrique d'un quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$

Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Exemple.
Calculer la forme algébrique de $z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i}$

Solution :
$z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i} = \dfrac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{3 - 4i - 3i - 4}{3^2 + 4^2} = \dfrac{-1 - 7i}{25} = -\dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i$

2 Représentation des nombres complexes dans le plan

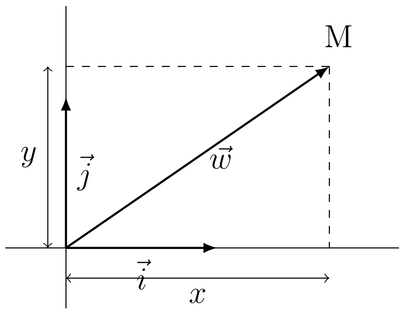
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2.1 Affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Définition 4

Soit M le point du plan de coordonnées $(x;y)$.

- On appelle **affixe du point M** le nombre complexe $x+iy$.
- On appelle **affixe du vecteur** $\boldsymbol{\vec{w}}$ l'affixe du point M tel que $\vec{w}=\overrightarrow{OM}$.



Proposition 3

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}$.

Exemple.
Soit A le point d'affixe $z_\mathrm{A}=2-3i$ et B le point d'affixe $z_\mathrm{B}=-1+5i$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Solution :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} &= z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A} \\ &= (-1+5i)-(2-3i) \\ &= -1+5i-2+3i \\ &= -3+8i \end{aligned}$$

Proposition 4

Soient $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Le vecteur $\vec{w_1}+\vec{w_2}$ a pour affixe z_1+z_2.
- Le vecteur $\lambda\vec{w_1}$ a pour affixe λz_1.

Exemple.
Soient $\vec{w_1}$ d'affixe $z_1=3i+5$ et $\vec{w_2}$ d'affixe $z_2=1-i$. Calculer l'affixe du vecteur $3\vec{w_1}+\vec{w_2}$.

Solution :
L'affixe de $3\vec{w_1} + \vec{w_2}$ est :

$$\begin{aligned} 3z_1 + z_2 &= 3 \times (3i + 5) + (1 - i) \\ &= 9i + 15 + 1 - i \\ &= 16 + 8i \end{aligned}$$

2.2 Module d'un nombre complexe

Définition 5

Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.
Le **module de z** , noté $|z|$ est défini par :

$$|z| = \text{OM}.$$

Proposition 5

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration.
Cette formule découle directement du théorème de Pythagore. □

Exemple.
Si $z = 1 - 3i$, on a $|z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Proposition 6

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Alors :

- $|\overline{z_1}| = |z_1|$
- $|-z_1| = |z_1|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$

Exemple.
Calculer le module de $z = \dfrac{1 - i}{3 + 2i}$.

Solution :

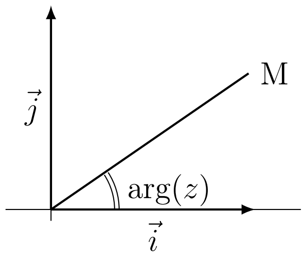
$$|z| = \left|\frac{1 - i}{3 + 2i}\right| = \frac{|1 - i|}{|3 + 2i|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{2}{13}}$$

2.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 6

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

- Un **argument de z**, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
- Un argument d'un nombre complexe n'est pas unique.
  Plus précisément, tous les arguments de z diffèrent d'un multiple de 2π.
- On appelle **argument principal** de z l'argument appartenant à $]-\pi;\pi]$.



Exemple.
En plaçant -2 et $5i$ dans un repère, on voit que :

- $\arg(-2) = \pi$
- $\arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}$

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 7

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Définition 7

Soit z un nombre complexe non nul. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors ,

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

Il s'agit de la **forme trigonométrique de z**.

Exemples.

1. Déterminer la forme algébrique de $z = 5 \times (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Solution :

1. $z = 5 \times (-1 + i \times 0) = -5$.

2. On a $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   On commence par déterminer $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
   D'une part, $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   D'autre part, $\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi, on voit que $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
   Finalement, la forme trigonométrique de z est :
$$z = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Méthode – Calculer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

- Déterminer le module r.
- Calculer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ afin d'en déduire la valeur de θ.
- Écrire la formule trigonométrique :
$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

4 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 8

Pour tout réel θ, on définit l'**exponentielle complexe** de θ par :
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition 8

Soit z un nombre complexe non nul. Si on note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a alors ,
$$z = re^{i\theta}$$

Démonstration.
La forme trigonométrique de z est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Comme $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, on en déduit directement que $z = re^{i\theta}$. □

Proposition 9

Pour tout réel θ_1 et θ_2, on a :
$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Remarque.
Cette relation est identique à celle vérifiée par la fonction exponentielle réelle et justifie donc que l'on ait utilisé le nom d'exponentielle complexe ici.

Démonstration.
La propriété découle en fait des formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme. En effet :

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \times (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

□

Proposition 10 – Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier n, on a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Remarque.
- La forme exponentielle est à privilégier pour calculer des produits de nombres complexes.
- La forme algébrique est à privilégier pour calculer des sommes de nombres complexes.

Exemple.
Soit $z = -2 - 2i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. Calculer z^4.

Solution :

1. On détermine la forme exponentielle de z :
$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Ainsi, $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ et on a donc $z = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.

2.

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^4 \times \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= 2^4 \times \left(\sqrt{2}\right)^4 \times e^{4\times -3i\frac{\pi}{4}} \\ &= 16 \times 4 \times e^{-3i\pi} \\ &= 16 \times 4 \times (-1) \\ &= -64 \end{aligned}$$