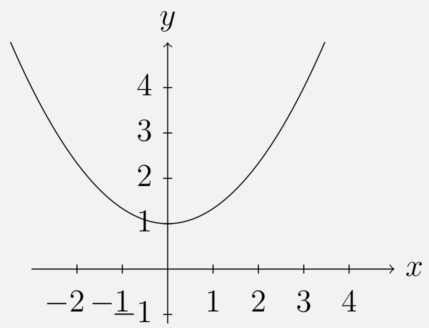
Fonctions : variations et extrema – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆		10, 11	1, 2, 3	2, 5		
Exercices ⋆⋆		12	4, 14	6, 7, 8, 9, 14		7, 8, 9
Exercices ⋆ ⋆ ⋆		13, 15, 16	15, 16		15, 16	

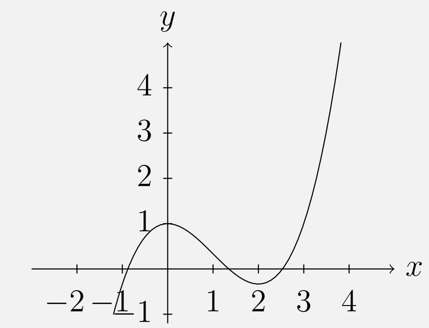
Exercice 1 ⋆ [Représenter]

Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont les courbes sont représentées ci-dessous, dresser le tableau de variations.

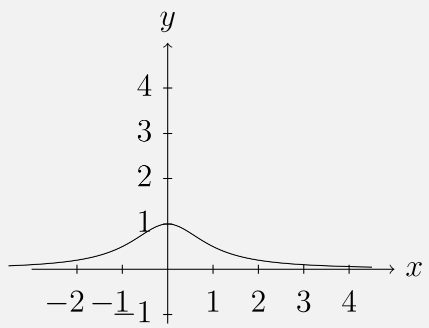
1.



2.



3.



Exercice 2 ⋆ [Raisonner, Représenter]

Dans chaque cas, expliquer pourquoi le tableau de variations est incohérent.

1.

x	$-\infty$		2		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	2	↗	

2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	-2	↘	

Exercice 3 ⋆ [Représenter]

Tracer un exemple de courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	2	↗	

Exercice 4 ⋆⋆ [Représenter]

Tracer la courbe représentative d'une fonction dont le tableau de signes et le tableau de variations sont donnés ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	-2	↗	

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 5 ⋆ [Raisonner]

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	2	↘	0	↗	

Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est vraie, si elle est fausse, ou si le tableau ne permet pas de conclure.

1. $f(0) < f(4)$
2. $f(0) < f(1)$
3. $f(0) \leqslant f(1)$
4. $f(-3) < f(-1)$
5. $f(2) \leqslant f(5)$
6. $f(5) = 1$
7. $f(3{,}9) > f(5{,}9)$
8. $f(0) \geqslant f(7)$

Exercice 6 ⋆⋆ [Raisonner]

Pour chacune des propositions, déterminer si elle est vraie ou fausse. Déterminer ensuite si la réciproque est vraie ou fausse.

1. Si f est croissante sur $[0\,;1]$, alors $f(0) \leqslant f(1)$.
2. Si f est décroissante sur $[-2\,;2]$, alors $f(-1) < f(1)$.
3. Si f est strictement décroissante sur $[-1\,;2]$, alors $f(-1) > f(1)$.
4. Si f est strictement décroissante sur $[-1\,;2]$, alors $f(-1) \geqslant f(1)$.
5. Si f vérifie $f(-1) \leqslant f(1)$, alors f est croissante sur $[-1\,;1]$.
6. Si f vérifie $f(0) > f(1)$, alors f est strictment décroissante sur $[0\,;1]$.

Exercice 7 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 4$ est croissante.

Exercice 8 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Montrer que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2} - 5$ est décroissante.

Exercice 9 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, indiquer lesquelles sont croissantes et lesquelles sont décroissantes en justifiant succinctement.

1. $f_1 : x \longmapsto 3x - 1$
2. $f_2 : x \longmapsto -3x + 1$
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{2}{3}x + 1$
4. $f_4 : x \longmapsto -\dfrac{2}{3}x + 1$
5. $f_5 : x \longmapsto x^3 + x - 5$
6. $f_6 : x \longmapsto -x^3 - x - 5$

Exercice 10 ⋆ [Modéliser]

Un emetteur sonore émet un son d'intensité constante. On mesure l'intensité acoustique en W/m^2 en se plaçant à différentes distances du son émis. On note $I(l)$ l'intensité acoustique mesurée en fonction de la distance à l'émetteur l comprise entre 1m et 10m.
Dresser le tableau de variations de I.

Exercice 11 ⋆ [Modéliser]

On lache une pierre sans vitesse initiale du haut d'un immeuble de 20m de hauteur. On note $h(t)$ la hauteur de la pierre par rapport au sol en fonction du temps t. La balle touche le sol à $t = 2s$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction h ?
2. Donner le tableau de variations de h.
3. Déterminer l'image de 2 par h.

Exercice 12 ⋆⋆ [Modéliser]

La température exterieure est de 10 degrés C. Un appartement est chauffé à 19 degrés C. On coupe alors le chauffage à 22h et on laisse la température évoluer jusqu'à 5h le lendemain matin. On modélise la température en fonction du temps par une fonction T définie sur $[0\,;7]$.

1. Donner le tableau de variations de T.
2. Interpréter par une phrase l'égalité suivante : $T(3) = 17$?
3. Donner un encadrement de T :
   Pour tout $t \in [0\,;7]$, $\ldots \leqslant T(t) \leqslant \ldots$

Exercice 13 ⋆⋆⋆ [Modéliser]

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[0; +\infty[$ qui donne l'aire d'un carré en fonction de son périmètre.

1. Trouver une expression algébrique définissant $\mathcal{A}$.
2. Donner le tableau de variations de $\mathcal{A}$.

Exercice 14 ⋆⋆ [Raisonner, Représenter]

On donne le tableau de variations d'une fonction f.

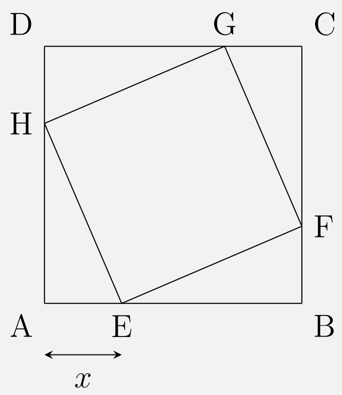
x	0		2		4		5
$f(x)$	-4	↘	-5	↗	-1	↘	-2

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. En justifiant les réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.
   a. $f(1) < f(3)$ *b.* $f(1) = -4{,}5$
   c. $f(1) < f(0)$ *d.* $f(1) < f(5)$
   e. $f(3) < 0$ *f.* $\min(f) = -2$
   g. $f(3) = -3$ *h.* $f(2) < f(5)$
3. Dans un repère, tracer une courbe pouvant être la courbe représentative de f.
4. Recopier et compléter les phrases suivantes en utilisant soit « pour tout …, on a … » soit « il existe un … tel que … ».
   a. … réel x … $f(x) > -4$.
   b. … réel x … $f(x) \leqslant 1$.
   c. … réel x … $f(x) = -3$.
   d. … réel x … $f(x) \leqslant 0$.
   e. … $x \in [0\,;4]$ … $f(x) \leqslant -1$.
   f. … $x \in [0\,;4]$ … $f(x) \geqslant -2$.
   g. … réel x … $f(x) = -1$.
   h. … réel x … $f(x) \geqslant -5$.
   i. … réel x … $f(x) > -5$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

On considère un carré ABCD de côté AB = 1. EFGH est un carré tel que :

- Les points E, F, G, H appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
- AE = BF = CG = DH = x avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.



On souhaite déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du carré EFGH est minimale.

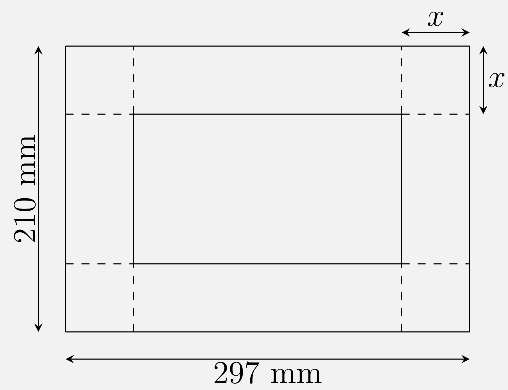
1. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du carré EFGH. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$:
$$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 2x + 1$$
2. Afin de tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$, on écrit l'algorithme suivant en Python :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 1, 50)
y = 2*x**2-2*x+1
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Implémenter cet algorithme et en déduire, par lecure graphique, la solution au problème posé.

Exercice 16 ⋆⋆⋆ [Modéliser, Calculer, Représenter]

On dispose d'une feuille A4 cartonnée (210 × 297 mm) avec laquelle on souhaite fabriquer une boîte. On découpe la feuille au niveau des pointillés et on relève les rabats afin d'obtenir une boîte sans couvercle. On note x la hauteur de la boîte en mm et $\mathcal{V}(x)$ son volume en mm^3.



1. Montrer que pour tout $x \in [0;105]$:
$$\mathcal{V}(x) = x\,(210 - 2x)\,(297 - 2x)\,.$$
2. À l'aide d'un algorithme Python, déterminer une valeur approchée de x tel que le volume de la boîte soit maximal.