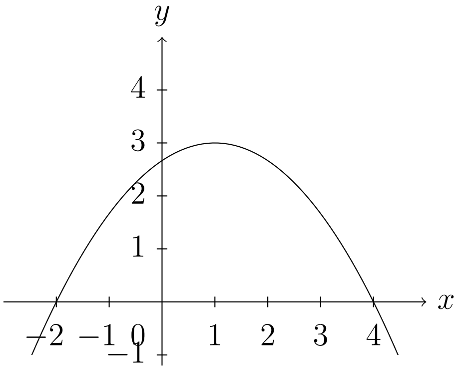
Lycée Lucie Aubrac - 2^{nde}

Chapitre 9
Fonctions
Variations et extrema

Table des matières

Introduction

Décrire les variations d'une fonction revient à déterminer si elle est croissante (« la courbe monte ») ou si elle est décroissante (« la courbe descend »). La réponse peut bien entendu dépendre de l'intervalle considéré.
Par exemple, si on considère la fonction f dont la courbe est représentée ci-dessous :



On voit graphiquement que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;1]$
et qu'elle est décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
On peut résumer ces informations dans le tableau suivant, appelé « tableau de variations ».

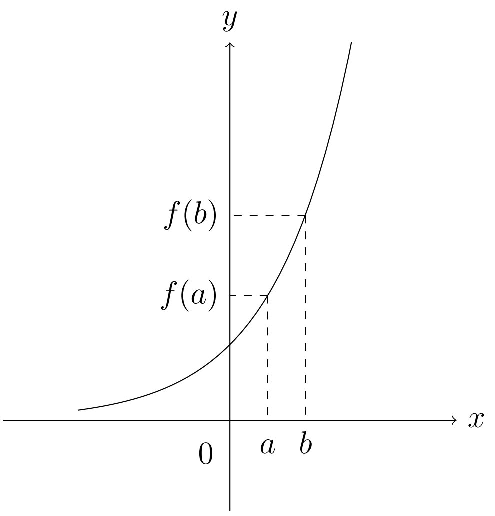
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Enfin, on dit que 3 est le maximum de la fonction f, atteint en $x = 1$.

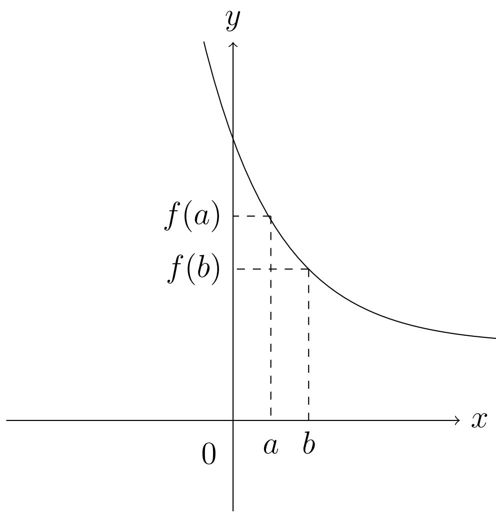
1 Variations d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :
- f est **croissante** sur I si pour tous $a \leqslant b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si pour tous $a \leqslant b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.



Fonction croissante

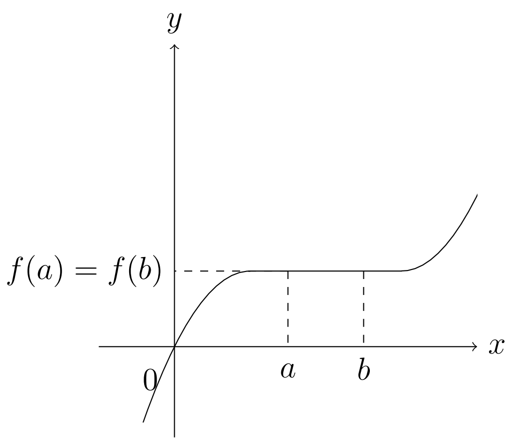


Fonction décroissante

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :
- f est **strictement croissante** sur I si pour tous $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **strictement décroissante** sur I si pour tous $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Remarque.
La fonction ci-dessous est croissante mais n'est pas strictement croissante.



Exemple.
Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 4x^2 - 3$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Solution :
On considère deux réels a et b appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et tels que $a \leqslant b$.
On va montrer que $f(a) \leqslant f(b)$. En fait :

$$\begin{aligned} & a \leqslant b \\ \text{donc} \quad & a^2 \leqslant b^2 \\ \text{donc} \quad & 4a^2 \leqslant 4b^2 \\ \text{donc} \quad & 4a^2 - 3 \leqslant 4b^2 - 3 \\ \text{donc} \quad & f(a) \leqslant f(b). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tous $a, b \in [0\,;+\infty[$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.
Cela signifie exactement que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$

Exemple.
Montrer que la fonction $f : x \longmapsto -2x + 5$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution :
On considère deux réels a et b appartenant à $\mathbb{R}$ et tels que $a \leqslant b$.
On va montrer que $f(a) \geqslant f(b)$. En fait :

$$\begin{aligned} & a \leqslant b \\ \text{donc} \quad & -2a \geqslant -2b \\ \text{donc} \quad & -2a + 5 \geqslant -2b + 5 \\ \text{donc} \quad & f(a) \geqslant f(b). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.
Cela signifie exactement que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

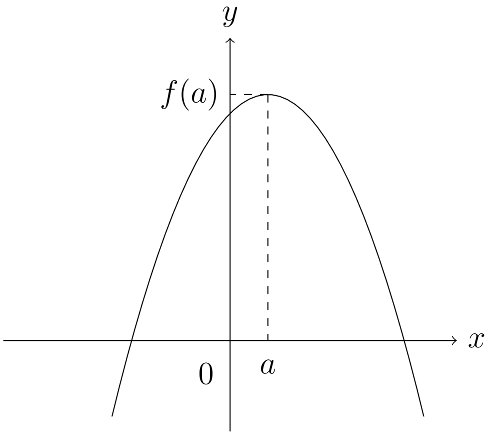
Remarque.
Dans un tableau de variations, par convention, une flèche indique la stricte croissance ou la stricte décroissance d'une fonction.

2 Extrema

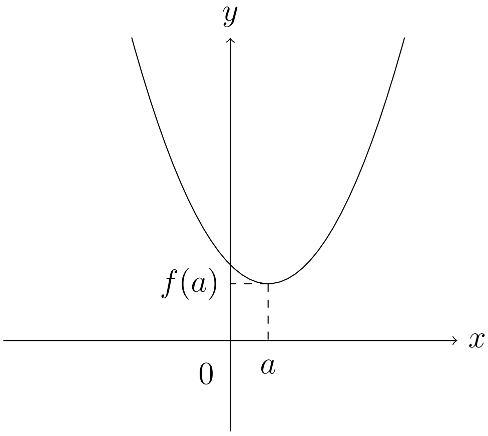
Définition 3

- Dire que la fonction f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant f(a)$.

- Dire que la fonction f admet un **minimum** en a sur l'intervalle I signifie que, pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant f(a)$.
- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

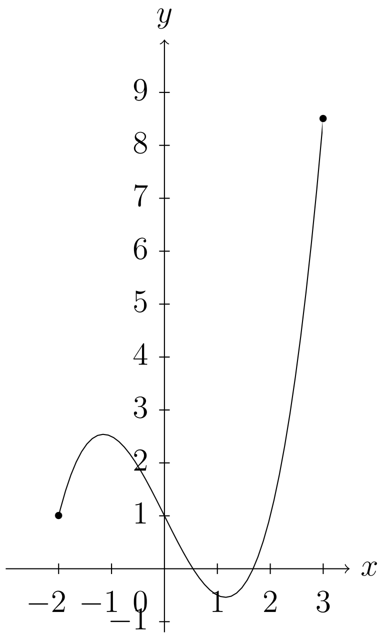


Maximum



Minimum

Exemple.
Déterminer graphiquement le minimum et le maximum de la fonction suivante définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$. En quelles valeurs sont-ils atteints ?



Solution :
Le minimum est environ $-0{,}5$. Il est atteint en $x = 1{,}1$.
Le maximum est environ $8{,}5$. Il est atteint en $x = 3$.

Savoir-faire du chapitre

- Faire le lien entre représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extrema d'une fonction.
- Montrer, dans des cas simples, qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle.
- Déterminer des inégalités à partir du tableau de variations d'une fonction.