Lycée Lucie Aubrac - 2$^{\text{nde}}$

Chapitre 8
Fonctions : équations et inéquations

Table des matières

1 Résolution d'équations

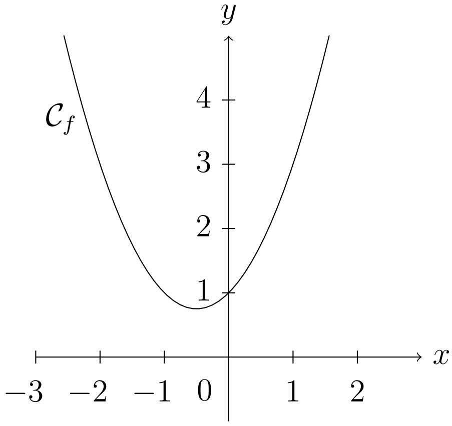
1.1 Résolution d'une équation de la forme $f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

Méthode – Résoudre l'équation $f(x)=k$

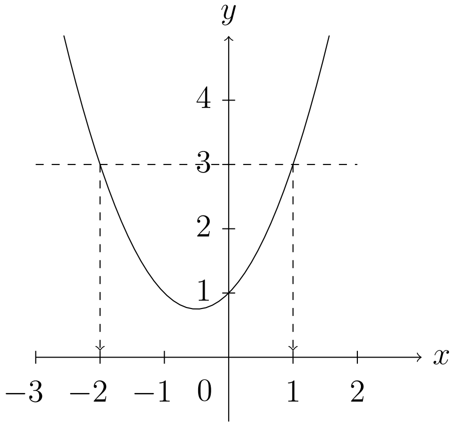
Résoudre l'équation $f(x) = k$ consiste à chercher les nombres x tels que $f(x) = k$. Cela revient à déterminer les antécédents de k par f.

1.1.1 Résolution graphique

Exemple.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ dont la courbe est représentée ci-dessous.



Solution :



Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $x = -2$ et $x = 1$.
Ainsi, $\mathcal{S} = \{1\,; -2\}$

1.1.2 Résolution algébrique

Exemple.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x$.
Résoudre $f(x) = -4$

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) = -4 \\ \iff\; & x^2 + 4x = -4 \\ \iff\; & x^2 + 4x + 4 = 0 \\ \iff\; & (x+2)^2 = 0 \quad \text{(d'après la règle du produit nul)} \\ \iff\; & x + 2 = 0 \\ \iff\; & x = -2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-2\}$

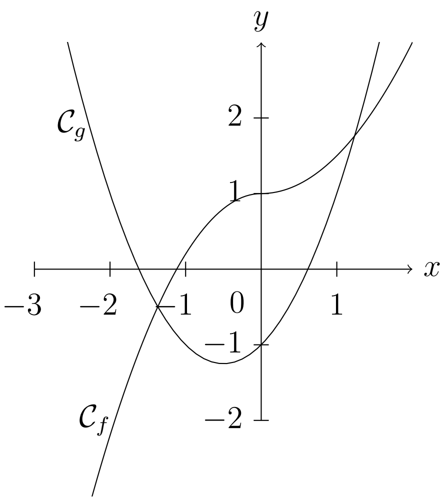
1.2 Résolution d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$

Méthode – Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

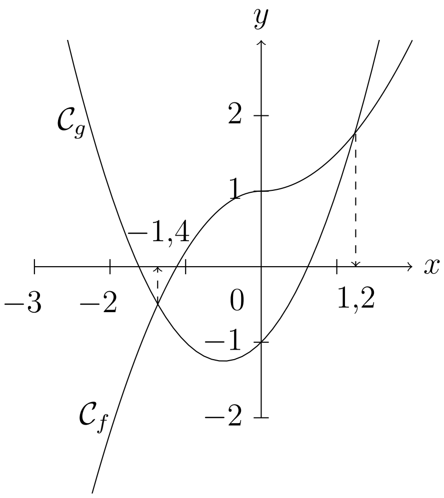
Si f et g sont deux fonctions, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, c'est trouver les abscisses de tous les points d'intersection des courbes représentatives de f et de g.

1.2.1 Résolution graphique

Exemple.
Dans le cas où les fonctions f et g sont représentées par les deux courbes ci-dessous, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.



Solution :



Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont $x \simeq -1{,}4$ et $x \simeq 1{,}2$.
Ainsi, $\mathcal{S} = \{-1{,}4\,;1{,}2\}$

1.2.2 Résolution algébrique

Exemple.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)x$ et $g(x) = 2(x+1)$.
Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Soultion :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\iff\ & (x+1)x = 2(x+1) \\
\iff\ & (x+1)x - 2(x+1) = 0 \\
\iff\ & (x+1)(x-2) = 0 \\
\iff\ & x+1 = 0 \ \text{ ou } \ x-2 = 0 \\
\iff\ & x = -1 \ \text{ ou } \ x = 2
\end{aligned}$$

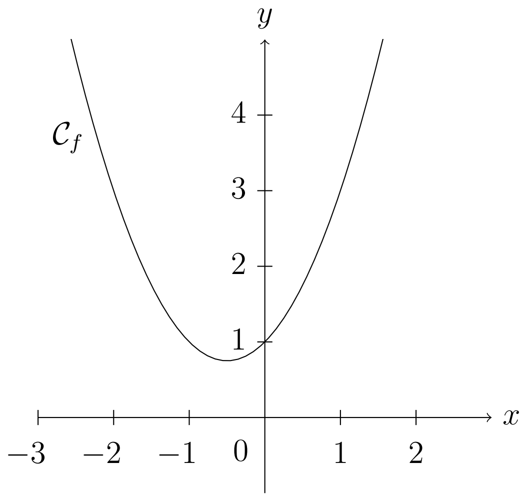
Ainsi, $\mathcal{S} = \{-1\,;2\}$

2 Résolution d'inéquations

2.1 Résolution d'inéquations de la forme $f(x) \geqslant k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

2.1.1 Résolution graphique

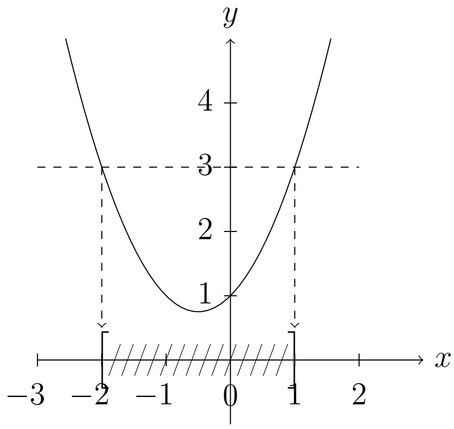
Exemple.
On considère la fonction f dont la courbe est représentée ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant 3$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < 1$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geqslant 1$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < 0$.

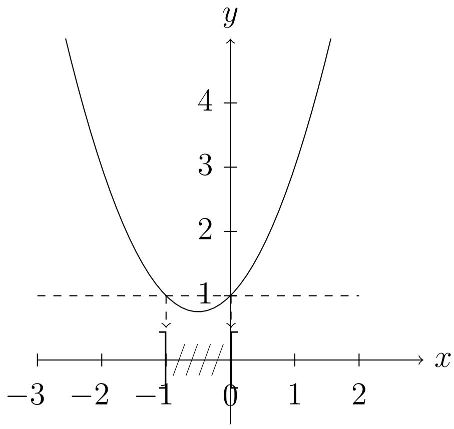
Solution :

1.



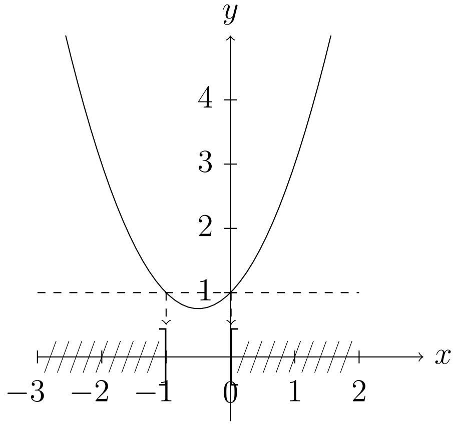
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-2\,;1]$.

2.



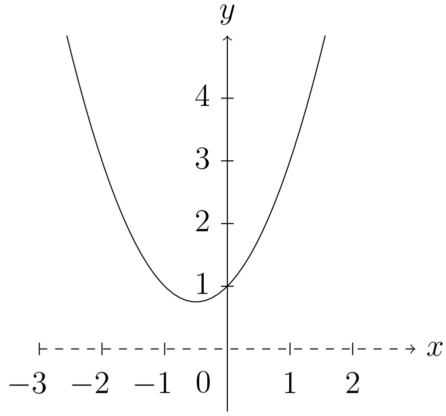
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-1\,;0[$.

3.



L'ensemble des solutions est
$\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$.

4.



L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

2.1.2 Résolution algébrique

Exemple.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 1$.
Résoudre $f(x) \geqslant -1$.

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

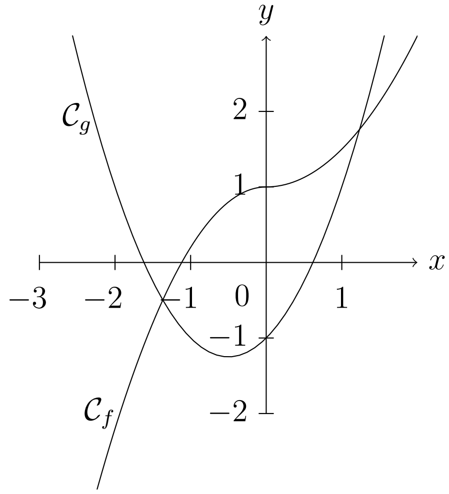
$$\begin{aligned}
& f(x) \geqslant -1 \\
\iff & -3x + 1 \geqslant -1 \\
\iff & -3x \geqslant -2 \\
\iff & x \leqslant \frac{-2}{-3} \qquad \text{(car } -3 < 0\text{)} \\
\iff & x \leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$

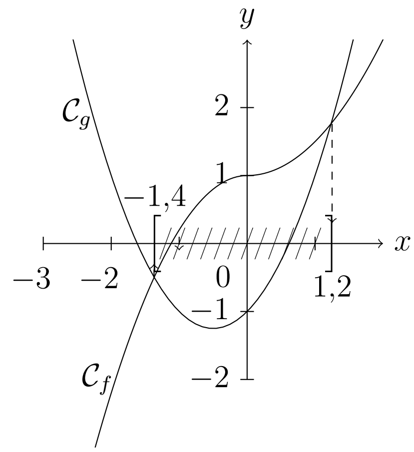
2.2 Résolution d'inéquations de la forme $f(x) \geqslant g(x)$

2.2.1 Résolution graphique

Exemple.
Dans le cas où les fonctions f et g sont représentées par les deux courbes ci-dessous, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



Solution :



L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1{,}4\,;1{,}2]$.

2.2.2 Résolution algébrique

Exemple.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = -5x + 2$.
Résoudre l'équation $f(x) \geqslant g(x)$.

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
& f(x) \geqslant g(x) \\
\iff\ & 3x + 1 \geqslant -5x + 2 \\
\iff\ & 3x + 5x \geqslant 2 - 1 \\
\iff\ & 8x \geqslant 1 \\
\iff\ & x \geqslant \frac{1}{8} \qquad (\text{car } 8 > 0)
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{8}\,;+\infty\right[$.

3 Applications à l'étude des fonctions

3.1 Étude du signe d'une fonction

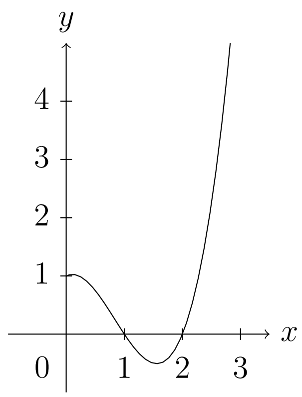
Définition 1

Étudier le signe d'une fonction f définie sur un intervalle I consiste à déterminer, pour chaque $x \in I$, le signe de $f(x)$.

Méthode – Étudier le signe d'une fonction

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
- Synthétiser les informations sous la forme d'un tableau.

Exemple.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et est représentée par la courbe ci-dessous.



Étudier le signe de la fonction f.

Solution :
- On résout $f(x) = 0$:
  Les solutions sont $x = 1$ et $x = 2$.
- On résout $f(x) > 0$:
  Les solutions sont les réels x appartenant à $[0\,;1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.
- Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple.
La fonction f est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.
Étudier le signe de la fonction f.

Solution :
- On résout $f(x) = 0$:
  Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & -2x+3=0 \\ \iff\ & 3 = 2x \\ \iff\ & \frac{3}{2} = x \end{aligned}$$

- On résout l'inéquations $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} & -2x+3>0 \\ \iff\ & 3 > 2x \\ \iff\ & \frac{3}{2} > x \end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple.
La fonction g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)(x-2)$.
Étudier le signe de la fonction g.

Solution :

- On résout $g(x) = 0$:
  Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-2) = 0 \\ \iff & x+1 = 0 \ \text{ ou } \ x-2 = 0 \quad \text{(règle du produit nul)} \\ \iff & x = -1 \ \text{ ou } \ x = 2 \end{aligned}$$

- On résout les inéquations $x + 1 > 0$ et $x - 2 > 0$:
  D'une part, $x + 1 > 0 \iff x > -1$.
  D'autre part, $x - 2 > 0 \iff x > 2$.
- Ainsi, en utilisant la règle des signes d'un produit, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x) = (x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple.
La fonction h est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$.
Étudier le signe de la fonction h.

Solution :

- On résout $h(x) = 0$:
  Soit $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{-2x-1}{x-1} = 0 \\ \iff & -2x - 1 = 0 \\ \iff & -2x = 1 \\ \iff & x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- On résout les inéquations $-2x - 1 > 0$ et $x - 1 > 0$:
  D'une part, $-2x - 1 > 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$.
  D'autre part, $x - 1 > 0 \iff x > 1$.
- Ainsi, en utilisant la règle des signes d'un quotient, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

3.2 Étude de la position relative de deux courbes

Définition 2

Étudier la position relative de deux courbes consiste à chercher quelle courbe est au dessus de l'autre. La réponse peut bien entendu dépendre de l'intervalle considéré.

Méthode – Étudier la position relative des courbes de f et g

Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exemple.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et $g(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Solution :
Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on résout $f(x) \leqslant g(x)$:
Soit $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}
& f(x) \leqslant g(x) \\
\iff\ & x^3 - 3x + 2 \leqslant 5x^2 - 3x + 2 \\
\iff\ & x^3 - 3x + 2 - 5x^2 + 3x - 2 \leqslant 0 \\
\iff\ & x^3 - 5x^2 \leqslant 0 \\
\iff\ & x^2(x-5) \leqslant 0
\end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe de la fonction suivante : $x \longmapsto x^2(x-5)$.

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2(x-5)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x) \iff x^2(x-5) \leqslant 0 \iff x \leqslant 5$.
Finalement, on a montré que :

- La courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,; 5]$.
- a courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[5\,; +\infty[$.

Savoir-faire du chapitre

- Résoudre une équation de la forme $f(x) = k$ graphiquement ou par le calcul.
- Résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$ graphiquement ou par le calcul.
- Résoudre une inéquation de la forme $f(x) \geqslant k$ graphiquement ou par le calcul.
- Résoudre une inéquation de la forme $f(x) \geqslant g(x)$ graphiquement ou par le calcul.
- Dresser le tableau de signes d'une fonction.
- Étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions.
- Résoudre un problème en le modélisant par une fonction.